

4. Хакимов А., Турсунова Е.М., Кодирова Ш.Т. Об одном методе вычисления нестандартных, несобственных интегралов // Весник науки и образования. Научно-методический журнал. Изд. «Проблема наука». № 7 (110). Часть 3. Апрель 2021. – С. 16-22.

5. Ашурова Д.Н. Совершенствование преподавания в системе высшего образования на основе инновационных программно-дидактических комплексов (на примере науки «Алгебра и теория чисел»). Доктор философских наук (PhD) педагогических наук. – Ташкент: 2018. – С. 52.

6. Хакимов А., Д.Чулиева, З.Исмоилова. Умумлашган ажойиб лимитлар ҳақидаги теоремалар тадбири. “Педагогик маҳорат” илмий-методик журналі. – Бухоро: №3, 2013. 64-66-б.

7. Ashurova D.N., Qodirova Sh.T. Ba’zi bir funksiyalar sinfi limitlarini hisoblashning innovatsion usuli haqida. Ilm sarchashmalari ilmiy-metodik jurnali. –Urgench: №4, 2020. 11-14-b.

РЕЗЮМЕ. Мақолада айрим ноанъанавий кетма-кетликлар ва функциялар чегараларини ҳисоблашни соддалаштириш масалалари, шунингдек, чизиқли алмаштиришлар, Лемма ва теоремалардан фойдаланиш имкониятлари кўриб чиқилган.

РЕЗЮМЕ. В статье рассматриваются вопросы упрощения вычисления некоторых нестандартных последовательностей и пределов функций с помощью линейных подстановок, Лемм, теорем.

SUMMARY. The article discusses the simplification of calculating certain non-standard sequences and function limits using linear substitutions, Lemmas, and theorems.

ОБОСНОВАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ И ПОДСЧЕТНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПОДЗЕМНЫХ ВОД НА ОСНОВЕ ГЕОИНФОРМАЦИОННО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Р.П.Жумабаев – магистрант

Ташкентский информационно технологический университет

Таянч сўзлар: ер ости сувлари, чегара шароитлари, географик ахборот тизими, математик моделлаштириш, сувли қатлам, оқимни ҳисоблаш.

Ключевые слова: подземные воды, граничные условия, геоинформационная система, математическое моделирование, водоносный горизонт, расчёт потока.

Key words: groundwater, boundary conditions, geographic information system, mathematical modeling, aquifer, flow calculation.

Введение. За последние десятилетия основным стимулом для проведения гидрогеологических исследований была необходимость оценки водоносного потенциала аквиферов [3]. Однако за последние 20 лет акцент сместился с проблем водоснабжения на вопросы качества подземных вод [4]. Это обусловило потребность в прогнозировании перемещения загрязняющих веществ в подповерхностной среде [6]. Одним из следствий такого смещения приоритетов стало изменение научных подходов и методов сбора данных [2]. Ранее основное внимание уделялось разработке методов оценки и измерения водоотдающих свойств высокопроницаемых водоносных горизонтов [3]. В настоящее время основной акцент сделан на процессах переноса и дисперсии загрязняющих веществ, их задержке и разложении, а также на изучении влияния геологической неоднородности на пути фильтрации и время движения подземных вод [5, 8].

За последние два десятилетия наблюдаются также значительные технологические прорывы в области гидрогеологии подземных вод [1]. Одним из направлений технологического прогресса стало развитие и использование детерминированных компьютерных моделей с распределёнными параметрами для анализа фильтрации и переноса растворённых веществ в системах подземных вод [5, 7]. Эти достижения во многом стали возможны благодаря развитию вычислительной техники – появлению более мощных, быстрых и доступных компьютеров с большими объёмами памяти [4]. Другим важным направлением технологического прогресса стало применение изотопного анализа в гидрогеологии подземных вод [10].

Подземные воды играют важнейшую роль в обеспечении пресной водой населения, сельского хозяйства и

промышленности [2]. Правильное определение граничных условий и расчётных параметров является ключевым фактором для достоверного моделирования фильтрации и движения подземных вод [3, 5]. В последние годы интеграция геоинформационных систем (ГИС) и математических моделей зарекомендовала себя как эффективный подход для анализа подземных вод и прогноза их поведения [7, 9]. Цель данного исследования – разработать подход, который объединяет ГИС-данные и математические методы для обоснования реальных граничных условий и расчёта основных гидрогеологических параметров.

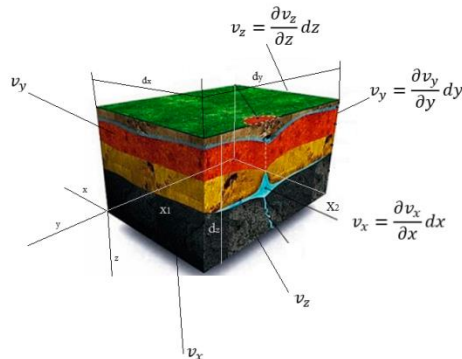
Обзор литературы. Слово «модель» имеет так много определений и так часто используется, что порой бывает трудно уловить его точный смысл (Konikow и Bredehoeft, 1992 в [5]). Модель, возможно, проще всего определить как представление реальной системы или процесса. Концептуальная модель – это гипотеза о том, как функционирует система или процесс. Эта гипотеза может быть выражена количественно в виде математической модели. Математические модели – это абстракции, которые представляют процессы в виде уравнений, физические свойства – в виде констант или коэффициентов в этих уравнениях, а состояния или потенциалы системы – в виде переменных.

Большинство моделей подземных вод, используемых сегодня, представляют собой детерминированные математические модели. Детерминированные модели основаны на законах сохранения массы, импульса и энергии и описывают причинно-следственные связи. Основное предположение заключается в том, что при высоком уровне понимания процессов, с помощью которых воздействия на систему вызывают её отклик, можно заранее предсказать реакцию системы на любое

воздействие, даже если величина новых нагрузок выходит за рамки диапазона ранее наблюдавшихся значений. Детерминированные модели подземных вод, как правило, требуют решения дифференциальных уравнений в частных производных. Точные решения часто можно получить аналитически, но аналитические модели требуют сильной идеализации параметров и границ. Некоторые детерминированные модели рассматривают свойства пористой среды как укрупнённые параметры (фактически как «чёрный ящик»), но это не позволяет учитывать неоднородность гидравлических свойств в модели. Неоднородность, или изменчивость свойств водоносного горизонта, является характерной чертой всех геологических систем и в настоящее время признана ключевым фактором, влияющим на движение подземных вод и транспорт растворённых веществ. Поэтому зачастую предпочтительнее применять модели с распределёнными параметрами, которые позволяют более реалистично описывать распределение свойств системы. Численные методы дают приближённые решения исходных уравнений (или системы уравнений) за счёт дискретизации пространства и времени. В пределах дискретизированной области внутренние свойства, границы и нагрузки системы аппроксимируются. Детерминированные численные модели с распределёнными параметрами позволяют избежать жёстких идеализированных условий аналитических или укрупнённых моделей [6-10].

Количество и типы уравнений, которые требуется решить, определяются исходя из представлений о доминирующих управляющих процессах. Коэффициенты этих уравнений – это параметры, отражающие свойства системы, границы и нагрузки; зависимые переменные уравнений отражают состояние системы и вычисляются путём решения уравнений. Когда численный алгоритм реализуется в виде компьютерного кода для решения одного или нескольких дифференциальных уравнений в частных производных, полученный программный код можно рассматривать как универсальную модель. Когда размеры сетки, граничные условия и другие параметры (такие как коэффициент фильтрации и водоотдача) задаются для конкретного географического района, этот программный продукт становится моделью, ориентированной на конкретный участок. Способность универсальных моделей точно решать исходные уравнения обычно демонстрируется на примерах применения к упрощённым задачам [11-12].

Методология и эмпирический анализ. Основа любой модели движения подземных вод – это принцип сохранения массы (закон сохранения) и закон Дарси, который описывает, как фильтруется вода через грунт.



Чтобы описать, как течёт подземная вода, мы берём маленький элемент породы (кусочек грунта). Этот элемент называют *представительным объёмом*. Он такой маленький, что в нём можно считать, что свойства внутри – почти одинаковые, но всё же можно учесть, как вода входит и выходит. Этот элемент имеет размеры dx, dy, dz по осям x, y, z . Через этот элемент проходит поток воды. Нам нужно понять баланс: сколько воды вошло – сколько вышло = сколько осталось внутри.

Если поток по направлению X равен v_x , то за короткое время δt через левую грань войдёт воды:

$$\text{Приток} = v_x \cdot dy \cdot dz \cdot \delta t.$$

Через правую грань выйдет воды чуть больше или меньше – ведь скорость может измениться.

Эта скорость справа будет:

$$v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx.$$

Значит, отток:

$$\text{Отток} = \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right) dy dz \delta t.$$

Чтобы найти разность воды по оси X, берём приток минус отток:

$$\text{Разность} = v_x dy dz \delta t - \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right) dy dz \delta t = - \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dy dz \delta t$$

Это значит: если производная $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ положительна – скорость растёт, то воды внутри убавляется (вода быстрее уходит). Аналогично считаем для Y и Z. Точно так же считаем, сколько воды приходит и уходит по Y и Z:

$$\text{По Y: } - \frac{\partial v_y}{\partial y} dx dy dz \delta t, \text{ По Z: } - \frac{\partial v_z}{\partial z} dx dy dz \delta t.$$

Вода может не только течь, но и «сжиматься» вместе с грунтом. Это учитывается через параметр **удельного водоотдачи** — S_0

Если напор (уровень грунтовых вод) меняется, то часть воды «выжимается» или наоборот всасывается обратно в поры.

Эта часть равна:

$$- \delta h \cdot S_0 \cdot dx dy dz$$

Если поделить на время, то это:

$$- \frac{\delta h}{\delta t} \cdot S_0 \cdot dx dy dz \delta t$$

Все эти потоки должны «сойтись». Вода не появляется из ниоткуда и не пропадает. Баланс:

$$- \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_z}{\partial z} - S_0 \frac{\partial h}{\partial t} = 0.$$

Убираем объёмы и время — остаётся:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + S_0 \frac{\partial h}{\partial t} = 0.$$

По закону Дарси, скорость фильтрации связана с перепадом напора:

$$v_x = -K_x \frac{\partial h}{\partial x}, v_y = -K_y \frac{\partial h}{\partial y}, v_z = -K_z \frac{\partial h}{\partial z}.$$

Если вместо скоростей подставить Дарси:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-K_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-K_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-K_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) + S_0 \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

Если проницаемости постоянные, то это упростится:

$$K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = S_0 \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Это и есть основное уравнение фильтрации. Оно показывает, как распределяется напор h в пространстве и времени. Если слой толщиной m — переход к транс-проводности. Часто используют не проницаемость K , а **трансмиссивность** $T = K m$ и **коэффициент ёмкости**

$S=S_0m$. Тогда формула та же, только с Т и S:

$$T_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + T_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = S \frac{\partial h}{\partial t}$$

Если есть скважина или источник — добавляем Q. Если внутри есть источник или сток (например, скважина), добавляем Q:

$$T_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + T_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + Q = S \frac{\partial h}{\partial t}$$

Для стационарного режима, если напор не меняется со временем $\frac{\partial h}{\partial t}=0$ получаем Лаплас:

$$T_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + T_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

Для одинаковой проницаемости во всех направлениях, если $T_x=T_y=T_z=T$:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t}$$

Если есть источник — добавляем Q/T:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \frac{Q}{T} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t}$$

Решение предложенной модели фильтрации подземных вод.

В данной работе рассмотрим задачу определения пьезометрического напора $h(x,y,z,t)$ в трёхмерной области фильтрации, описываемой уравнением:

$$T_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + T_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = S \frac{\partial h}{\partial t}, \quad x,y,z \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

Здесь:

T_x, T_y, T_z - коэффициенты фильтрации в соответствующих координатных направлениях (единицы измерения: $\left[\frac{L^2}{T}\right]$,

S - коэффициент ёмкости пласта (безразмерная величина);

h - пьезометрический напор.

Начальное условие для напора принимаем в виде:

$$h(x,y,z,0)=f(x,y,z),$$

где $f(x,y,z)$, - заданная функция начального распределения напора.

1. Преобразование уравнения методом Лапласа.

Для упрощения решения применяем одномерное преобразование Лапласа по времени. Лаплас каждой части исходного уравнения записывается так:

$$L \left[S \frac{\partial h}{\partial t} \right] = T_x L \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right] + T_y L \left[\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right] + T_z L \left[\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right]$$

Используем известное свойство преобразования Лапласа для производной по времени:

$$L \left[\frac{\partial h}{\partial t} \right] = sL[h] - h(x,y,z,0),$$

Подставляя начальное условие, получаем:

$$sSL[h] - Sf(x,y,z) = T_x L \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right] + T_y L \left[\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right] + T_z L \left[\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right]$$

2. Запишем уравнение в Лаплас-образе.

Преобразованное уравнение принимает вид:

$$sSL[h] = Sf(x,y,z) + T_x L \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right] + T_y L \left[\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right] + T_z L \left[\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right]$$

Тогда:

$$L[h] = \frac{1}{s} f(x,y,z) + \frac{1}{sS} \left[T_x L \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right] + T_y L \left[\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right] + T_z L \left[\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right] \right]$$

3. Применение метода гомотопии.

Для приближённого решения используется метод гомотопии (НРМ). Предполагается, что решение $h(x,y,z,t)$ можно разложить в ряд по малому параметру p [9–12]:

$$h(x,y,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n h_n(x,y,z,t), \quad p \in [0,1].$$

Тогда уравнение в Лаплас-образе можно переписать как:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n h_n = L^{-1} \left[\frac{1}{s} f(x,y,z) \right] + \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} p^{n+1} L^{-1} \left[\frac{1}{s} \left[T_x L \left[\frac{\partial^2 h_n}{\partial x^2} \right] + T_y L \left[\frac{\partial^2 h_n}{\partial y^2} \right] + T_z L \left[\frac{\partial^2 h_n}{\partial z^2} \right] \right] \right]$$

4. Сопоставление членов ряда.

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях p , последовательно получаем:

Нулевая аппроксимация:

$$h_0(x,y,z,t) = L^{-1} \left[\frac{1}{s} f(x,y,z) \right] = f(x,y,z).$$

Первая аппроксимация:

$$h_1(x,y,z,t) = \frac{1}{s} L^{-1} \left[\frac{1}{s} \left(T_x L \left[\frac{\partial^2 h_0}{\partial x^2} \right] + T_y L \left[\frac{\partial^2 h_0}{\partial y^2} \right] + T_z L \left[\frac{\partial^2 h_0}{\partial z^2} \right] \right) \right]$$

Вторая аппроксимация:

$$h_2(x,y,z,t) = \frac{1}{s} L^{-1} \left[\frac{1}{s} \left(T_x L \left[\frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} \right] + T_y L \left[\frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2} \right] + T_z L \left[\frac{\partial^2 h_1}{\partial z^2} \right] \right) \right]$$

Аналогично можно получить все последующие члены.

5. Итоговое приближённое решение.

Окончательное решение записывается как сумма полученного ряда:

$$h(x,y,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x,y,z,t).$$

На практике ряд обрывается после конечного числа членов N :

$$h(x,y,z,t) \approx \sum_{n=0}^N h_n(x,y,z,t).$$

Заключение. В данной работе была решена трёхмерная модель фильтрации подземных вод с использованием комбинированного метода Лапласа и метода гомотопии возмущений (ЛНРМ). Последовательно были получены приближённые аналитические решения, которые учитывают начальное распределение пьезометрического напора и основные параметры водоносного горизонта — коэффициенты фильтрации и ёмкости пласта.

Комбинация преобразования Лапласа и метода гомотопии позволила обойти трудности, возникающие при решении нелинейных или слабо разрешимых дифференциальных уравнений. Полученное аналитическое представление в виде степенного ряда даёт удобный инструмент для анализа динамики фильтрационного процесса и может быть использовано при инженерных расчётах и моделировании подземных вод.

Таким образом, предложенный подход демонстрирует высокую эффективность, хорошую сходимость и практическую применимость для решения задач гидрогеологии и инженерной геологии.

Литература

1. Алямовский А.А. Математическое моделирование в гидрогеологии. – Москва: «Недра», 2018.
2. Киселёв В.М., Кузнецов О.Л. Подземные воды и методы их изучения. – Санкт-Петербург: Изд-во СПбГУ, 2016.
3. Шестаков В. М. Гидродинамика подземных вод. – Москва: Изд-во МГУ, 2015.
4. Bear J. Hydraulics of Groundwater. – New York: «McGraw-Hill», 1979.
5. Anderson M.P., Woessner W.W., Hunt R.J. Applied Groundwater Modeling: Simulation of Flow and Advective Transport. – 2nd ed. «Academic Press», 2015.
6. Zheng C., Bennett G.D. Applied Contaminant Transport Modeling. – 2nd ed. «Wiley-Interscience», 2002.
7. Harbaugh A.W. MODFLOW-2005, The U.S. Geological Survey Modular Ground-Water Model – the Ground-Water Flow Process. – U.S. Geological Survey Techniques and Methods 6-A16, 2005.
8. Carrera J., Neuman S.P. Estimation of Aquifer Parameters Under Transient and Steady-State Conditions: 1. Maximum Likelihood Method Incorporating Prior Information. //Water Resources Research. 1986. Vol. 22(2). –P. 199-210.
9. ITU (International Telecommunication Union). GIS Applications in Groundwater Resources Management. – Geneva: ITU, 2019.
10. IAEA (International Atomic Energy Agency). Isotope Methods for Dating Old Groundwater. – Vienna: «IAEA», 2013.
11. Ghislain de Marsily. Quantitative Hydrogeology: Groundwater Hydrology for Engineers. «Academic Press», 1986.
12. Kinzelbach W. Groundwater Modelling: An Introduction with Sample Programs in BASIC. – Elsevier, 1986.
13. Ахмедов И. А. Гидродинамика подземных вод и математическое моделирование. Учебное пособие. – Ташкент: ТТИТУ, 2010.
14. Юлдашев Б.Ю. Гидравлика ва гидрология. – Тошкент: «Фан», 2006.
15. Хакимов Б.Х., Хакимов А.Б. Гидрогеология ва ер ости сувлари. – Тошкент: «Университет», 2012.

РЕЗЮМЕ. Ушбу мақолада геоахборот ва математик моделлаштиришдан фойдаланган ҳолда чегара шартлари ва ер ости сувлари ҳаракатининг ҳисобланган параметрларини асослаш кўриб чиқилади. Иш турли гидрогеологик шароитларда ер ости сувларининг тарқалиши ва ҳаракатини аниқлаш учун дала маълумотларини, ГИС воситаларини ва математик тенгламаларни бирлаштиради. Олинган натижалар ер ости сувлари балансини баҳолашнинг аниқлигини ошириш ва улардан оқилон фойдаланиш чора-тадбирларини ишлаб чиқишга хизмат қилмоқда.

РЕЗЮМЕ. В данной статье рассматривается обоснование граничных условий и расчётных параметров движения подземных вод с использованием геоинформационно-математического моделирования. В работе интегрируются полевые данные, инструменты ГИС и математические уравнения для определения распределения и движения подземных вод в различных гидрогеологических условиях. Полученные результаты способствуют повышению точности оценки баланса подземных вод и разработке мероприятий по их рациональному использованию.

SUMMARY. This article examines the justification of boundary conditions and calculated parameters of groundwater movement using geoinformation and mathematical modeling. The work integrates field data, GIS tools and mathematical equations to determine the distribution and movement of groundwater in various hydrogeological conditions. The results obtained contribute to improving the accuracy of groundwater balance assessment and developing measures for their rational use.

VEKTORLAR JÁRDEMINDE ALGEBRALÍQ MÁSELELERDI SHESHİWDİŇ NÁTIYJELI USÍLLARI

T.T.Kalekeeva – pedagogika ilimleri boyınsha filosofiya doktori, docent

U.D.Maxsutova – talaba

H.S.Quanishbaeva – talaba

Ájiniyaz atındaǵı Nókis mámleketlik pedagogikalıq instituti

Tayanch soʻzlar: vektor, skalyar koʻpaytma, modul, kollinearlik, tenglama, tengsizlik, vizual yondashuv.

Ключевые слова: вектор, скалярное произведение, модуль, коллинеарность, уравнение, неравенство, визуальный подход.

Key words: vector, scalar product, modulus, collinearity, equation, inequality, visual approach.

Kirisiw. Vektorlar geometriya hám algebranı baylanıstırıwshı kópir bolıp esaplanadı. Olar járdeminde geometriyalıq máselelerdi sheshiw de, algebralıq mäseleni sheshiw de ańsatlasıwı múmkin. Lekin bilimlendiriw procesin jetilistiriwde máselelerdi sheshiw ushın vektor algebrasınıń keń imkaniyatlarınan jeterli dárejede paydalanılmaı atır.

Tiykargı bólim. Vektorlar algebranı geometriyalastırıwda hám geometriyanı algebralastırıwǵa, ápiwayıraq etip aytqanda, algebranı geometriyaǵa hám geometriyanı algebraǵa «aylandırıw» imkaniyatın beredi. Bunnan tisqari vektorlar informaciyalardı «ıqshamlastırıw»ǵa hám onı kórgizbeli qılıwǵa imkaniyat beredi hám sonıń menen birge, dálillerdi izlep tabıwdı ańsatlastıradı.

Eki vektordıń skalyar kóbeymesi túsiniǵın mektep geometriya kursına kiritip, bul túsinikti úyretiwge kóbirek itibar beriw talap etiledi. Eki vektor skalyar kóbeymesiniń nátiyjesi vektor bolmay, bálki san bolıwı, sonday-aq skalyar kóbeytiwdiń qásiyetleri sanlardı kóbeytiw qásiyetlerine uqsaslıǵına oqıwshılardıń itibarın tartıw kerek. Sonıń menen bir qatarda vektorlardı skalyar kóbeytiwdiń ózine tán qásiyetlerin oqıwshılardıǵa óz-aldına túsindiriledi [1-5].

Eki vektordıń skalyar kóbeymesi túsiniǵı kiritilip, onıń tiykargı qásiyetleri keltirilgennen keyin geometriyalıq máseleler menen bir qatarda algebralıq máselelerdi sheshiwge keń imkaniyatlar ashıladı.

Algebranı «geometriyalastırıw»da vektorlardıń skalyar kóbeymesi hám onıń qásiyetleri, sonday-aq koordinatalarda