

ТЕҢСИЗЛИКЛЕРДИ ФУНКЦИЯНЫҢ ҚӘСІЙЕТТЕРІНЕН ПАЙДАЛАНЫП ДӘЛІЙЛЛЕУ ЖОЛЛАРЫ

Р.Қошкарбаева - ассистент оқытушы

М.Қасымов – техника илимлерінің кандидаты, доцент

К.Өмірбаева - математика оқытушы методикасы тәлім бағдарының 3-курс талабасы

Әжанияз атындағы Нөкіс мәмлкетлік педагогикалық институты

Таянч сўзлар: теңсізлік, симметрия, монотон (чизикли) функция, экстремум, ҳосила, исботлаш.

Ключевые слова: неравенство, симметрия, монотонная линейная функция, монотон, экстремум, производный, доказательство.

Key words: inequality, symmetry, monotonic (linear) function, monoton, extremum, derivative, proof.

Хәзирги дәўирде академиялық лицей хәм улыўма билимлендириў мектеплериниң алдына қойылған тийкарғы мәселелердиң бири математиканы оқытуўда оқыўшылардың дәретиўшилиқ қәбилетин, ойлаў қәбилетин хәр тәрәплеме раўажландырыў болып есапланады. Бул мәселе болса, өз гезегинде теңсізликлерди дәлийллеў жолларын үйретиў менен тиккелей байланысly. Бизге мәлим, академиялық лицей хәм улыўма билимлендириў мектеплериндеги математика курсында классикалық теңсізликлерди жеткиликли дәрежеде толық көлемде баянлаў қыйын, себеби хәр бир дара теңсізликте дәлийллеўде, өзине тән түрлендириўин талап етеди. Соның ушын да математика курсынан билим алыўда, әмелиятта жиий ушырасатуғын, логикалық ойлаў қәбилетин раўажландырыўға арналған теңсізликлерди дәлийллеў жолларын үйретиў хәм оларды усы бағдардағы хәр қыйлы мазмундағы мәселелер менен таныстырыў, ең зәрүрли мәселелердиң бири болып есапланады. Бул жумыс жоқарыда атап өткенимиздей қосымша толықтырыўда яғный оқыўшыларға теңсізликлерди дәлийллеўдиң хәр қыйлы жолларын үйретиў арқалы, олардың билимин хәм өз-бетинше пикирлеўин күшейтиўге хәм теренлетиўге, дәретиўшилиқ қәбилетин раўажландырыўға, өзиниң үлкен жәрдемин тийгизеди деп ойлаймыз. Биз усынып отырған жумыста бириншиден, тийкарғы классикалық теңсізликлерди әпиўайы дәлийллеўге хәм жаңа теңсізликлерди дүзиўге мүмкиншилиқ беретугын екиншиден, көргизбелі хәм тез өзлестирип алыў мүмкин көриниске ийе улыўма теңсізлик көрсетиледи.

Егер f функция $[a, b]$ кесиндиде анықланған хәм монотон болса, яки кесиндиниң ишинде жалғыз бир экстремумға ийе болса, онда минимум жағдайында функция ең үлкен мәнисине (A қәсийет), максимум жағдайында ең киши мәнисине (B қәсийет) кесиндиниң шетки нокатларында ерисетуғыны мәлим.

Енди функцияның бул қәсийетлеринен пайдаланып, гейпара теңсізликлерди дәлийллеўлерине мысаллар келтиремиз [1-4].

1-мысал. Егерде $x \geq 2$ болса, онда

$$2x^3 + x^2 + 2x \geq 24$$

болатуғынын дәлийллен.

Дәлийллеў. Теңсізликтің шеп тәрәпин $f(x)$ деп белгилеймиз. Сонда $f(2) = 24$. $f(x)$ функция ҳақыйқый санлар көплигинде анықланған. $\forall x \in R$ нокатта дифференциалланыўшы болып $f'(x) > 0$ болады. Бул туўынды оң

анықланған. Сонлықтан, функция санлар көшеринде өсиўши. Сол себебли $x \geq 2$ нокатларда $f(x) \geq f(2)$. Теңсізлик дәлийлленди.

2-мысал. Теңсізликте дәлийллен.

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq a^2b + b^2c + c^2a + 1,$$

бул жерде a, b, c санлары $[0; 1]$ кесиндиге дерек.

Дәлийллеў. $[0; 1]$ кесиндиде

$$f(x) = (1-b)x^2 - c^2x + b^2 + c^2 - b^2c - 1$$

функцияны қараймыз. Бул функция $[0; 1]$ кесиндиде дифференциалланыўшы хәм оның туўындысы

$$f'(x) = 2(1-b)x - c^2.$$

Егер $b \neq 1$ болса, онда $f'(x)$ туўынды өседі, демек, $f(x)$ функция A қәсийетке ийе хәм өзиниң ең үлкен мәнисине $[0; 1]$ кесиндиниң шетки нокатларында ериседи.

$$f(0) = b^2 + c^2 - b^2c - 1 = (1-c)[b^2 - (1+c)] \leq 0,$$

$$f(1) = 1 - b - c^2 + b^2 + c^2 - b^2c - 1 = b(b-1) - b^2c \leq 0.$$

Солай етип, $[0; 1]$ кесиндиде $f(x) \leq 0$, сонлықтан $f(a) \leq 0$. $b = 1$ болған жағдайда да дәлийллеў усыған уқсас.

$$3\text{-мысал. } e^x \geq 1 + x \quad (2)$$

теңсізликте, сондай-ақ, теңлик тек $x = 0$ мәнисинде орынланатуғынын дәлийллен.

Дәлийллеў. $y = e^x - 1 - x$ функциясын дүземиз хәм оның экстремумларын туўынды жәрдемінде изертлеймиз.

$$y' = e^x - 1; e^x - 1 = 0, x = 0.$$

$f(x) = e^x$ функциясы, x тың терис мәнислеринде 1 ден киши, ал x тың оң мәнислеринде 1 ден үлкен. Сонлықтан, $y' = e^x - 1$ туўындысы $x=0$ критикалық нокатта өзиниң белгисин теристен оңға өзгертеди. Буннан келип шығады, $y = e^x - 1 - x$ функциясы $x=0$ нокатта минимумға ийе екенлигин билемиз. Онда ол бул нокатта ең киши мәниске ийе болады. Оны есаплаймыз:

$$y_{\min} = y(0) = 0$$

Буннан x тың барлық мәнислеринде

$$y(x) \geq y_{\min} = 0, e^x - 1 - x = 0, e^x \geq 1 + x$$

(2) теңсізлик дәлийлленди. Дәлийллеўден көринип турыпты, теңсізлик тек $x=0$ мәнисинде теңликке айланады.

4-мысал. Егер $a, b, c \in [0; 1]$ болса, онда

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1$$

теңсизлиги орынлы болатуғынын дәлиллелен.

Дәлиллеләй. $[0; 1]$ кесиндиде

$$f(x) = \frac{x}{b+c+1} + \frac{b}{c+x+1} + \frac{c}{x+b+1} + (1-b)(1-c)(1-x)$$

функцияны қараймыз. Бул функцияның туғындысын табамыз:

$$f'(x) = d - \frac{b}{(c+x+1)^2} - \frac{c}{(x+b+1)^2},$$

бул жерде d – тураклы сан.

$f'(x)$ функция $[0; 1]$ кесиндиде өсиўши экени анык, сонлықтан $f(x)$ функция A қасийетке ийе, яғный өзиниң ең үлкен мәнисине яки 0 нокатта, яки 1 нокатта ериседи. Енди егер a ның мәнисин 0 яки 1 де тайынласак, онда теңсизликтиң шеп тәрәпиндеги аңлатпа b ның функциясы сыпатында $b = 0$ яки $b = 1$ де өзиниң ең үлкен мәнисине ийе болады. a хәм b лардың $[0; 1]$ кесиндиниң шетки нокатларындағы мәнислерин тайынлап, бизди қызықтыратуғын аңлатпа өзиниң ең үлкен мәнисине яки $c = 0$, яки $c = 1$ де ерисетуғынын көремиз.

Изертленетуғын аңлатпа a, b, c ларға карата симметриялық болғанлықтан, олардың теңлик орынлы болатуғын төрт $(0; 0; 0)$, $(0; 0; 1)$, $(0; 1; 1)$, $(1; 1; 1)$ мәнислер жыйнақларын қараў ғана қалады.

Теңсизлик дәлиллеленди.

5 - мысал. Мейли, x_1, x_2, x_3 ($0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, 3$) - хақықый санлар болсын.

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_1x_3 \leq 1$$

теңсизлигин дәлиллелен.

Дәлиллеләй.

$$f(x) = x + x_2 + x_3 - xx_2 - x_2x_3 - xx_3 = x(1 - x_2 - x_3) +$$

$+x_2 + x_3 - x_2x_3$, $x \in [0; 1]$ функцияны қараймыз. Бул монотон (сызықлы) функция, сонлықтан өзиниң ең үлкен мәнисине $[0; 1]$ кесиндиниң шетки нокатларында ериседи.

$$f(0) = x_2 + x_3 - x_2x_3 = 1 + (1 - x_3)(x_2 - 1) \leq 1,$$

$$f(1) = 1 - x_3 - x_2 + x_2 + x_3 - x_2x_3 = 1 - x_2x_3 \leq 1.$$

$$\text{Демек, } f(x_1) = x_1 + x_2 + x_3 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_1x_3 \leq 1.$$

$$6 - \text{мысал. Егер } |ax^2 + bx + c| \leq 1 \text{ теңсизлик}$$

$\forall x \in [-1; 1]$ ушын орынлы болса, онда x өзгеріушиниң

усы мәнислеринде $|cx^2 - bx + a| \leq 2$ теңсизлиги орынлы болатуғынын дәлиллелен.

Дәлиллеләй.

$|cx^2 - bx + a| \leq |cx^2 - c| + |c - bx + a| = |c|(1 - x^2) + |c - bx + a|$, $x \in [0; 1]$ теңсизлик орынлы. Егер $x = 0$ болса, онда $|ax^2 + bx + c| \leq 1$ теңсизликтен $|c| \leq 1$ теңсизлик келип шығады.

Солай етип,

$$|cx^2 - bx + a| \leq 1 + |c - bx + a|.$$

Енди $f(x) = |c - bx + a|$ функция $[-1; 1]$ кесиндиниң шетки нокатларының биреўинде максимал мәниске ийе болатуғынын ескертиў ғана қалды. Демек,

$$f(x) \leq \max(f(-1); f(1)) = \max(|c + b + a|; |c - b + a|) \leq 1$$

Демек,

$$|cx^2 - bx + a| \leq 1 + 1 = 2.$$

Солай етип, бул жумыста, академиялық лицей хәм улыўма билимлендириў мектептериндеги математика сабағына қосымша болыўы ушын зәрүрли болған, базыбир теңсизликтерди дәлиллеләудин жоллары, мысаллар жәрдемінде түсиндирилди. Бул болса, оқыўшылардың логикалық ойлаў қәбилетин раўажландырыўшы, қызықтырыўшы хәм усы мәселениң этирапында оқыўшылардың пикирлеўин, дәретиўшилиқ қәбилетин, укыплылығын тереңлетиў ушын зәрүрли. Буның нәтийжеси болса, оқыўшылардың, өз билимин кеңейтип барыўына, математикаға болған қызығыўшылығының артыўына тәсирин тийгизеди.

Соны айтып өтиўимиз керек, теңсизликтерди дәлиллеләй оларды шешиўге қарағанда қурамалырақ, бирақ қызықлы. Теңсизликтерди дәлиллеләудин биз қараған усылларынан басқа да бир қанша эффектив усыллары бар, бул усылларды үйретиў келеси изертлеўлеримиздин мазмуны болады.

Жуўмақластырып айтқанымызда, бул жумыстың материалынан академиялық лицей хәм кәсип-өнер колледж оқыўшылары ушын факультативлик яки дөгерек сабақларында пайдаланыў мақсетке муўапық болады.

Әдебиятлар

1. Беккенбах Э., Беллман Р. Введение в неравенства. -М.: «Мир», 1965.
2. Математические задачи. <http://www.problems.ru>
3. Коровкин П.П. Неравенства. -Вып.5.-М.: «Наука»,1983.
4. Исмаилов Ш., Ибрагимов О. Теңсизликлар-ІІ. Исботлашнинг замонавий усуллари. -Тошкент: 2008.

РЕЗЮМЕ

Бу мақолада теңсизликлар функциялариниң хоссаларидан фойдаланиб теңсизликларни исботлаш йўллари мисоллар ёрдамида тушунтирилган. Бундай теңсизликларни академик лицей ва касб-хунар коллежлари ўқувчилари факультатив ёки тұғарак дарсларида фойдаланиши мумкин.

РЕЗЮМЕ

Статья посвящается вопросам изучения способов объяснения неравенств с помощью функций неравенств. В академических лицеях и профессиональных колледжах освоение этого материала рекомендуется проводить на факультативных занятиях и в кружках.

SUMMARY

The article deals with the issues of ways of presentation and explanation of inequality with the help of functions of inequalities. At the academic lyceums and professional colleges it is recommended to teach this material at the optional courses and in the clubs.