

ОБ ОДНОМ ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ТЕОРЕМЫ ЛИУВИЛЛЯ НА ПЛОСКОСТИ

Б. Нарекеев – старший преподаватель

Д. Мырзанова – старший преподаватель

Нукусский государственный педагогический институт имени Ажинияза

Таянч сўзлар: функция, конденсатор, компакт, очик тўплам, трансфинит диаметр, лимит, доира, конформ модуль, трансфинит модуль, континуум.

Ключевые слова: функция, конденсатор, компакт, открытое множество, трансфинитный диаметр, предел, круг, конформный модуль, трансфинитный модуль, континуум.

Key words: function, condenser, compact, open set, transfinite diameter, limit, round, conform module, transfinite module, continuum.

Пусть E есть ограниченное бесконечное замкнутое множество точек на плоскости z . Положим

$$V(z_1, z_2, \dots, z_n) = \prod_{k,l=1}^n (z_k - z_l), \quad n \geq 2$$

$$k < l$$

где $z_1, z_2, \dots, z_n \in E$. Пусть $V_n = V_n(E)$ есть максимум модуля $|V(z_1, z_2, \dots, z_n)|$, когда $z_1, z_2, \dots, z_n$ пробегает различные системы n точек, принадлежащих множеству E . Этот максимум существует в силу непрерывной зависимости $V(z_1, z_2, \dots, z_n)$ от своих аргументов и замкнутости множества E . Положим

$$d_n = V_n^{\frac{2}{n(n-1)}} \quad d_n \text{ - не возрастает с возрастанием } n.$$

При всех n , d_n не превосходит диаметра множества E , то d_n при $n \rightarrow \infty$ стремится к определенному конечному пределу. Этот предел называется трансфинитным диаметром множества E и обозначается через $d = d(E)$, $d = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n$. В случае множества E , состоящего из конечного числа точек, естественно положить $d(E) = 0$.

Примеры.

1. Пусть E есть круг $|z| < R$. Трансфинитный диаметр любого круга равен его радиусу $d = R$.

2. Пусть E прямолинейный отрезок $-a \leq x \leq a$. Трансфинитный диаметр любого прямолинейного отрезка равен четверти его длины $d = \frac{a}{2}$.

Конденсатор определяется как тройка (R, A, B) , где R - связное открытое множество в плоскости P , дополнение $\sim R$ представляет собой объединение непересекающихся компактов A и B . Если R входит в ограниченную плоскость C , то ёмкость конденсатора (R, A, B) можно найти по формуле

$$C(R) = \inf_u \iint_R |\nabla u(x)|^2 dx^1 dx^2$$

где x^1, x^2 - координаты точки x и $\inf$ берётся по всем непрерывно-дифференцируемым функциям, значения которых ограничены в R нулём в A и единицей в B . Конформный модуль конденсатора определяется по формуле

$$\text{mod } R = \frac{2\pi}{C(R)}$$

- Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. -М.: «Наука», 1980.
- Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. -М.: «Наука», 1978.

Маколада тўпламининг трансфинит диаметри, конденсаторнинг конформ модули ва трансфинит модули таърифлари берилиб, Т.Бегби теоремаси асосида исботланадиган Лиувилл теоремаси келтирилган.

В статье даны определения трансфинитного диаметра множества, конформного модуля и трансфинитного модуля конденсатора, теорема Лиувилля, которая доказывается в силу теоремы Т.Бегби.

The article is devoted to the definition of transfinite diameter, the conform module and transfinite module of the condenser, the theorem of Liouville, which is proved by means of T. Begbi's theorem.

Например модуль кольца $G = \{x : r_1 < |x| < r_2\}$ равен

$$\text{mod } G = \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Если x_1, x_2, x_3, x_4 являются фиксированные точки плоскости $\bar{C}$, то абсолютное отношение $|x_1, x_2, x_3, x_4|$ определяется по формуле:

$$|x_1, x_2, x_3, x_4| = \frac{|x_1 - x_2| |x_3 - x_4|}{|x_2 - x_3| |x_4 - x_1|}$$

(R, A, B) произвольный конденсатор в P . Обозначим через $S(R)$ семейство мер Бореля формы $\sigma = \sigma_A - \sigma_B$. Для любого $\sigma \in S(R)$, мы определяем

$$I(\sigma) = \int_B \int_B \int_A \int_A \log |a_1, b_2, b_1, a_2| d\sigma(a_1) d\sigma(a_2) d\sigma(b_1) d\sigma(b_2)$$

Определяем трансфинитный модуль конденсатора R [1]:

$$mdR = \inf_{\sigma \in S(R)} I(\sigma)$$

Конденсатор (R, A, B) называется регулярным, если оба A и B имеют только счётное количество компонентов и не имеют компонентов состоящих из одной точки.

Теорема (Т. Багби). Для любого конденсатора $R \subset C$ конформный модуль и трансфинитный модуль совпадает, т.е. $\text{mod } R = mdR$.

Определение. Топологическое вложение $f : \Sigma \rightarrow C$ множества $\Sigma \subset C$ называется сохраняющим модули, если

$M(f\gamma_1, f\gamma_2) = M(\gamma_1, \gamma_2)$ для любой пары непересекающихся континуумов $\gamma_1, \gamma_2 \subset \Sigma$.

В силу теоремы Т. Багби доказывается следующая теорема.

Теорема. Если компактное множество $\Sigma \subset C$ имеет положительную размерность в каждой своей точке, то любое сохраняющее модули топологическое вложение

$f : \Sigma \rightarrow C$ продолжается до мёбиусова отображения всей плоскости C .

Литература

- Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. -М.: «Наука», 1980.
- Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. -М.: «Наука», 1978.

РЕЗЮМЕ

Маколада тўпламининг трансфинит диаметри, конденсаторнинг конформ модули ва трансфинит модули таърифлари берилиб, Т.Бегби теоремаси асосида исботланадиган Лиувилл теоремаси келтирилган.

РЕЗЮМЕ

В статье даны определения трансфинитного диаметра множества, конформного модуля и трансфинитного модуля конденсатора, теорема Лиувилля, которая доказывается в силу теоремы Т.Бегби.

SUMMARY

The article is devoted to the definition of transfinite diameter, the conform module and transfinite module of the condenser, the theorem of Liouville, which is proved by means of T. Begbi's theorem.