DUAL SANLAR HAQQÍNDA TÚSINIKLER

Tanirbergenov Sadıq Aleuovich – *fizika-matematika ilimleriniń kandidatı, docent*
www.sadiktanirbergenov@gmail.com
Ájiniyaz atındaǵı Nókis mámleketlik pedagogikalıq institutı

ПОНЯТИЕ О ДУАЛЬНЫХ ЧИСЛАХ

Танирбергенов Садык Алеуович – *кандидат физико-математических наук, доцент*
Нукусский государственный педагогический институт имени Ажинияза

CONCEPTS OF DUAL NUMBERS

Tanirbergenov Sadik Aleuovich – *Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor*
Nukus State Pedagogical Institute named after Ajiniyaz

Tayanch so‘zlar: dual son, kommutativlik, assotsiativlik, bazis, halqa, to‘plam, fazo, vektor, geometriya, funksiya, Teylor qatoriga yoyish, hosila.

Rezyume. Maqolada ikki o‘lchovli kommutativ-assotsiativ algebra bo‘lgan dual sonlar algebrasi ko‘rib chiqiladi. Unda dual sonlar ustida bajariladigan algebraik amallar hamda bu sonlarning funksiyalardagi qiymatlari berilgan.

Ключевые слова: дуальное число, коммутативность, ассоциативность, базис, кольцо, множество, пространство, вектор, геометрия, функция, разложение в ряд Тейлора, производная.

Резюме. В статье рассматривается алгебра дуальных чисел, являющаяся двумерной коммутативно-ассоциативной алгеброй. В ней представлены алгебраические операции, выполняемые над дуальными числами, а также значения этих чисел в функциях.

Key words: dual number, commutativity, associativity, basis, ring, set, space, vector, geometry, function, Taylor expansion, derivative.

Summary. The article considers the algebra of dual numbers, which is a two-dimensional commutative associative algebra. The algebraic operations performed on dual numbers, as well as the values of these numbers in functions, are presented.

Kirisiw. Matricalar hám anıqlawıshlar nızamın, sızıqlı keńislikti, tenzorlıq esaplawlardı, invariantlar nızamın úyreniwshi ulıwma algebranıń bólimi sızıqlı algebra dep ataladı.

Eger P haqıyqıy sanlar maydanındaǵı (A,+,·) saqıynanı anıqlawshı A kóplik n ólshemli vektorlıq keńislik bolıp, qálegen $\lambda \in P$ hám $a,b \in A$ elementler ushın

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$$

shárti orınlı bolsa, onda saqıyna hám vektorlıq keńislikten turatuǵın ((A,+,·), A) juplılıq P sanlar maydanındagı n ólshemli algebra dep ataladı.

Biz n ólshemli algebranı Q^n arqalı belgileymiz. Sonda anıqlama boyınsha Q^n algebra bir waqıtta P sanlar maydanındaǵı saqıyna hám usı sanlar maydanındaǵı n ólshemli vektorlıq keńislik boladı.

Eger Q^n algebranıń qálegen eki x,y elementleri $(x, y \in Q^n)$ ushın

$$x \cdot y = y \cdot x \qquad (1)$$

shárt orınlansa, onda bul algebra kommutativlik, al qálegen x,y,z $(x, y, z \in Q^n)$ elementleri ushın

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \qquad (2)$$

shárt orınlansa, onda Q^n algebra associativlik dep ataladı.

Bir waqıttıń ózinde kommutativlik hám associativlik bolatuǵın Q^n algebranı kommutativ-associativlik algebra dep aytamız.

Q^n algebranıń ólshemi onıń rangi dep te ataladı. Onda Q^n algebranıń rangi n ge teń boladı.

Joqarıda aytılǵan Q^n algebranıń anıqlaması boyınsha ol n ólshemli vektorlıq keńislik bolǵanlıqtan usı algebranıń (n sandaǵı) sızıqlı baylanıssız elementleri bar boladı. Algebranıń qálegen $\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$ sızıqlı baylanıssız elementlerinen dúzilgen sistema usı algebranıń bazisi dep ataladı. Q^n algebradaǵı sızıqlı baylanıssız elementlerdiń sanı usı algebranıń ólshemine teń boladı.

Q^n algebranıń bazasin $B = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$ dep belgileymiz. Vektorlıq keńisliktiń aksioması boyınsha $a \in Q^n$ element B bazistiń sızıqlı baylanıssız elementleri arqalı sızıqlı ańlatıladı, yaǵnıy

$$a = a^1\xi_1 + a^2\xi_2 + ... + a^n\xi_n. \qquad (3)$$

Ádebiyatlar analizi. Dual sanlar algebrası matematikada belgili bolıp, ol Vilyam Kliffordtıń hám Boris Abramovich Rozenfeldtiń jumıslarında ushırasadı [1]-[2].

Talqılaw. Dual sanlar algebrası geometriyada, fizikada hám ilimniń bir-qansha bólimlerinde óziniń qollanılıwlarına iye [3]-[4].

Tiykarǵı bólim. Bul jerde dual sanlar algebrası boyınsha túsinikler beriledi.

Dual san

$$z = x + y\omega;\ x, y \in R \qquad (4)$$

túrinde jazılıp, ω onıń jorıma birligi dep atalıp, ol ω≠1, ω≠-1, $\omega^2 = 0$ qásiyetlerge iye. Eger $\xi_1 = 1,\ \xi_2 = \omega$ dep alınsa, onda (4) teńlik $z = x\xi_1 + y\xi_2$ túrine keledi. Bul jerde $B = \{1, \omega\}$. Sonlıqtan dual sanlar kópligi eki ólshemli algebra boladı hám (4) teńliktegi *x* sanı *z* dual sannıń haqıyqıy bólegi, al *y* sanı jorıma bólegi dep ataladı. Bular sáykes túrde *Rez=x, Imz=y* arqalı belgilenedi. Eki dual sanlar bir-birine teń bolıwı ushın $z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$ shárt orınlanıwı kerek. Sonıń menen birge dual sanlardı qosıw, alıw hám kóbeytiw ámelleri mına túrde orınlanadı:

$(a+b\omega) + (s+d\omega) = (a+c) + (b+d)\omega$,

$(a+b\omega) - (s+d\omega) = (a-c) + (b-d)\omega$,

$(a+b\omega)(s+d\omega)=ac+ad\omega+bc\omega+bd\omega^2= ac+(ad+bc)\omega$.

Eki dual sannıń kóbeymesi haqıyqıy san bolıwı ushın $ad+bc=0$ teńliktiń orınlanıwınıń zárúrli hám jetkiliklilik shárti keying teńlikten kelip shıǵadı.

Bul sanlardıń birlik elementlerin kóbeytiw kestesi mına túrde jazıladı:

	1	ω
1	1	ω
ω	ω	0

Bunnan, dual sanlar algebrasınıń strukturalıq turaqlılıǵı tómendegishe bolıwı kelip shıǵadı.

$$C_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\overline{z} = x - y\omega$ sanı (4) teńlik penen berilgen z dual sanǵa túyinles san dep ataladı. Bulardıń $z\overline{z} = (x+y\omega)(x-y\omega) = x^2$ kóbeymesi haqıyqıy san boladı. Usı $|z|=x$ sanı z dual sannıń moduli dep ataladı. Dual sannıń $|z|=r$ moduli oń yamasa teris bolıwı múmkin. Berilgen $y\omega$ dual san ushın $|y\omega|=0$. Bunday sanlar noldiń bóliwshileri dep ataladı, yaǵnıy $a\neq 0$, $b\neq 0$ bolǵanda $(a\omega)(b\omega)=0$.

Dual sanlardıń qálegen z_1, z_2, z_3 elementleri ushın,

$$z_1z_2 = (x_1+y_1\omega)(x_2+y_2\omega) = x_1x_2+(x_1y_2+y_1x_2)\omega = x_2x_1+(x_2y_1+y_2x_1)\omega = z_2z_1,$$

$$(z_1z_2)z_3 = [(x_1+y_1\omega)(x_2+y_2\omega)](x_3+y_3\omega) = [x_1x_2+(x_1y_2+y_1x_2)\omega](x_3+y_3\omega) = x_1x_2x_3+(x_1x_2y_3+x_1y_2x_3+y_1x_2x_3)\omega = z_1(z_2z_3)$$

shártler orınlı. Solay etip, dual sanlar kópligi (1) hám (2) shárterge boysınadı eken.

Usı algebranıń elementlerin bóliw ámeli tómendegi túrde orınlanadı:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1+y_1\omega}{x_2+y_2\omega} = \frac{(x_1+y_1\omega)(x_2-y_2\omega)}{(x_2+y_2\omega)(x_2-y_2\omega)} = \frac{x_1x_2+(-x_1y_2+y_1x_2)\omega}{x_2^2} = \frac{x_1}{x_2}+\frac{-x_1y_2+y_1x_2}{x_2^2}\omega.$$

Demek, z_1 sandı z_2 sanǵa bólgenimizde $x_2\neq 0$ bolıwı kerek eken, yaǵnıy bóliwshiniń moduli nolge teń bolmawı kerek.

Moduli nolge teń bolmaǵan dual sanlardı kompleks sanlardıń trigonometriyalıq formasına uqsas formula menen kórsetiwge boladı. Máselen, (4) formula menen berilgen dual sanda $x\neq 0$ bolsın. Bul jaǵdayda:

$$z = x+y\omega = x(1+\frac{y}{x}\omega) = r(1+\omega\varphi). \qquad (5)$$

Bul jerdegi $\frac{y}{x} = \varphi$ san z sanınıń argumenti dep ataladı. Sonda,

$$r = |z| = x, \quad \arg z = \varphi = \frac{y}{x}.$$

Sonıń menen birge mına formulalar orınlı:

$|z_1z_2| = |z_1||z_2| = r_1r_2$, $\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2=\varphi_1+\varphi_2$.

Dual sannıń argumenti erikli haqıyqıy san, sonday-aq z - haqıyqıy san bolsa ($y=0$) $\varphi=0$ boladı. Túyinles dual sanlardıń modulleri teń, argumentleri belgileri boyınsha qarama-qarsı.

Joqarıdaǵı (5) formula menen berilgen dual sanlar ústinde orınlanatuǵın arifmetikalıq ámellerdi kórip ótemz.

1. $z_1\pm z_2=r_1(1+\omega\varphi_1)\pm r_2(1+\omega\varphi_2)=(r_1\pm r_2)+\omega(\varphi_1\pm\varphi_2)$

2. $z_1z_2=r_1(1+\omega\varphi_1)r_2(1+\omega\varphi_2)= r_1r_2(1+\omega\varphi_2+\omega\varphi_1+\omega^2\varphi_1\varphi_2) = r_1r_2[1+\omega(\varphi_1+\varphi_2)]$.

3. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(1+\omega\varphi_1)}{r_2(1+\omega\varphi_2)} = \frac{r_1(1+\omega\varphi_1)(1-\omega\varphi_2)}{r_2(1+\omega\varphi_2)(1-\omega\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}[1+\omega(\varphi_1-\varphi_2)]$.

4. $z^2=r(1+\omega\varphi)r(1+\omega\varphi)=r^2[1+\omega(\varphi+\varphi)]= r^2(1+2\omega\varphi)$, $z^3= r^3(1+3\omega\varphi)$, . . . , $z^n= r^n(1+\omega n\varphi)$.

5. $$\sqrt[n]{z} = \begin{cases} \sqrt[n]{r}(1+\omega\frac{\varphi}{n}), \ n=2k+1, \ r\neq 0, \\ \pm\sqrt[n]{r}(1+\omega\frac{\varphi}{n}), \ n=2k, \ r>0. \end{cases}$$

Solay etip, moduli nolge teń bolmaǵan taq sanlı túbirge iye dual san bir mánisli funkciya arqalı anıqlanadı, al jup sanlı dárejege iye bolǵan hám oń modulli dual sannıń túbiri eki mánisli funkciyaǵa iye bolıwı keyingi (5) formuladan kórinip turıptı. Moduli nolge teń bolǵan dual sannıń n dárejeli túbiri anıqlanbaǵan.

Endi dual sannıń ayrım funkciyalardaǵı mánisin qaraymız. Bunıń ushın

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

formula menen berilgen Teylor qatarın kórip óteyik. Biziń jaǵdayımızda,

$$f(x+y\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x+y\omega-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}y^k\omega^k =$$

$$= f(x)+yf'(x)\omega+\omega^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}y^k\omega^{k-2} = f(x)+yf'(x)\omega.$$

Demek, bir ózgegiwshili funkciyanıń dual sanlardaǵı mánisi (6) formula menen anıqlanatuǵın dual san boladı eken.

$$f(x+y\omega) = f(x)+yf'(x)\omega, \quad x,y\in R. \qquad (6)$$

Mısallar: 1. $f(x+y\omega) = e^{x+y\omega}$ funkciyanıń mánisin tabıń.

Sheshiliwi: $f(x)=e^x$, $f'(x)= e^x$ => $f(x+y\omega) = e^{x+y\omega} = e^x+ye^x\omega= e^x(1+y\omega)$.

2. $\ln(x+y\omega) = \ln x + y(\ln x)'\omega = \ln x + \omega y/x$.

3. $\sin(x+y\omega) =\sin x +y(\sin x)'\omega = \sin x +\omega y\cos x$.

4. $\cos(x+y\omega) =\cos x +y(\cos x)'\omega = \cos x - \omega y\sin x$.

5. $e^x(1+y\omega) = e^{x+y\omega} = e^xe^{y\omega} => e^{y\omega} = 1+y\omega$.

Juwmaq. Dual sanlar kópligi eki ólshemli algebra bolıp, onıń bazislik elementleri $\{1, \omega\}$ hám $\omega^2=0$ shártti qanaatlandıradı. Sonıń menen birge bul sanlar ústinde orınlanatuǵın arifmetikalıq ámeller bizlerge belgili bolǵan kompleks sanlarǵa uqsas. Dual sanlar algebrası da matematikanıń kóp bólimlerinde qollanılıwlarǵa iye.

Ádebiyatlar

1. Clifford W.K. Preliminary Scetch of Biquaternions. // Proc. London Math. Soc., s1-4(1), 1871. – P. 381-395.
2. Розенфельд Б.А. Неевклидова геометрия. – Москва: «Гостехиздат», 1955.
3. Рейнсберг Р. Квадратичные пространства над алгеброй дуальных чисел. – Москва: 1975.
4. Гордеев В.Н. Кватернионы и бикватернионы с приложениями в геометрии и механике. – Киев: «Сталь», 2016.