

УДК 519.852:631.5

ОПТИМИЗАЦИЯ РАЗМЕЩЕНИЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ КУЛЬТУР В МАЛОВОДНЫХ РЕГИОНАХ С ПОМОЩЬЮ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДА ФРАНКА-ВУЛЬФА

Утеулиев Ниетбай Утеулиевич – доктор физико-математических наук, профессор

utewlievn@mail.ru

Кулмуратов Кууанышбай Дуйсенбаевич – ассистент преподаватель

qqulmuratov@gmail.com

Нукусский государственный технический университет

Калханов Полатбек Жумабаевич – доктор философии по физико-математическим наукам, доцент

kalkhanov@gmail.com

Университет инновационных технологий

СУВ РЕСУРСЛАРИ ЧЕКЛАНГАН ҲУДУДЛАРДА ФРАНК-ВУЛЬФ УСУЛИДАН ФОЙДАЛАНИШ ҚИШЛОҚ ХЎЖАЛИГИ ЕКИНЛАРИНИ ЖОЙЛАШТИРИШНИ ОПТИМАЛЛАШТИРИШ

Утеулиев Ниетбай Утеулиевич – физика-математика фанлари доктори, профессор

Кулмуратов Кууанышбай Дуйсенбаевич – ассистент ўқитувчи

Нукус давлат техника университети

Калханов Полатбек Жумабаевич – физика-математика фанлари бўйича философия доктори, доцент

Инновацион технологиялар университети

OPTIMIZATION OF AGRICULTURAL CROP ALLOCATION IN WATER-SCARE REGIONS USING THE FRANK-WOLFE ALGORITHM

Uteuliev Nietbay Uteulievich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Kulmuratov Kuuanysbay Duisenbaevich – assistant teacher

Nukus State Technical University

Kalkhanov Polatbek Jumabaevich – Doctor of Philosophy in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
University of Innovative Technologies

Таянч сўзлар: Франк–Вульф усули, чизикли бўлмаган дастурлаш, модель, оптималаштириш, квадратик функция, мақсад функцияси, шартли градиент усули.

Резюме. Мақолада Қорақалпоғистон Республикаси Чимбой туманидаги 45 гектарлик тажриба майдонида егин майдонидларини тўртта егин – ғўза, бўғдой, қовун ва мош ўртасида тақсимлашни оптималаштириш учун чизикли бўлмаган дастурлаш модели қўрилган. Анъанавий чизикли моделлардан фарқли ўлароқ, тўпрок шўрланиши ва маржинал ҳосилдорликнинг камайишини ҳисобга олувчи квадратик мақсад функцияси қўлланилган. Модель тўққиз гуруҳ чекловни ўз ичига олади ва масала Франк–Вульф усули билан ечилган. Натижада умумий соф фойда 20,5% га (425,6 млн сўмдан 512,8 млн сўмгача) ошди, сувдан фойдаланиш самарадорлиги эса 18,8% га яхшиланди.

Ключевые слова: метод Франка–Вульфа, нелинейное программирование, модель, нелинейная модель, оптимизация, квадратичная функция, целевая функция, задача, метод условного градиента.

Резюме. В статье построена модель нелинейного программирования для оптимизации распределения посевных площадей на опытном участке площадью 45 га в Чимбайском районе Каракалпакстана между четырьмя культурами – хлопчатником, пшеницей, дыней и машем. В отличие от традиционных линейных моделей применена квадратичная целевая функция, учитывающая убывающую предельную продуктивность и влияние засоления почвы. Модель включает девять групп ограничений – от сезонных водных квот до трудовых и финансовых ресурсов. Задача решена методом Франка–Вульфа. Общая чистая прибыль выросла на 20,5% (с 425,6 до 512,8 млн сум), а эффективность водопользования повысилась на 18,8%.

Key words: Frank–Wolfe method, nonlinear programming, model, optimization, quadratic function, objective function, conditional gradient method.

Summary. The paper develops a nonlinear programming model for optimizing crop area allocation on a 45-hectare experimental plot in the Chimbay district of Karakalpakstan among four crops – cotton, wheat, melon and mung bean. Unlike conventional linear models, a quadratic objective function is applied that accounts for diminishing marginal productivity and soil salinity. The model incorporates nine groups of constraints, from seasonal water quotas to labour and financial resources, and is solved by the Frank–Wolfe method. Total net profit increased by 20.5% (from 425.6 to 512.8 million UZS) and water use efficiency improved by 18.8%.

Введение. Устойчивость сельского хозяйства в засушливых зонах оказалась под угрозой из-за острой нехватки воды и ускоряющегося изменения климата [9]. Бассейн Аральского моря, в частности нижнее течение Амударьи, – одна из наиболее экологически уязвимых зон мира: для фермеров Чимбайского района Каракалпакстана реальность складывается из ограниченных квот на орошение и высокой засоленности почвы, существенно подавляющих урожайность [6, 7].

Исторически стандартным инструментом определения схем севооборота выступало линейное программи-

рование (ЛП) [2]. Однако современные эмпирические данные показывают, что взаимосвязь между затратами ресурсов и фактической урожайностью далека от линейной: прогрессирующая деградация почвы и нелинейная реакция культур на колебания уровня воды требуют перехода к более сложным математическим моделям [1, 10]. Квадратичные функции урожайности обеспечивают более реалистичное моделирование производства, поскольку учитывают как физиологические ограничения растений, так и пагубные последствия чрезмерной концентрации землепользования [3].

Практическое применение нелинейного программирования ограничивается вычислительными трудностями при большом числе линейных ограничений [1]. Здесь доказывает свою ценность метод Франка-Вульфа, или метод условного градиента [4]: он разбивает сложную нелинейную задачу на последовательность более простых линейных подзадач [5]. Несмотря на исследования водосберегающих технологий в Узбекистане [8], применение таких алгоритмов на опытных участках Каракалпакстана остаётся малоизученным; настоящая работа восполняет этот пробел.

Методология. Рассматривается экспериментальный участок площадью 45 гектаров в Чимбайском районе, отражающий ключевые экологические ограничения региона – засоление почвы и нерегулярный доступ к оросительной воде.

Задача оптимизации формулируется как модель нелинейного программирования для максимизации общей чистой прибыли (Z).

Целевая функция:

Целью данного исследования является разработка математической модели и алгоритма оптимального распределения ограниченных земельных ресурсов (45 га) Чимбайского района между четырьмя видами культур (хлопчатник, пшеница, дыня и маш). Основная задача заключается в нахождении таких значений площадей посева для каждой культуры, которые обеспечили бы максимизацию совокупной чистой прибыли предприятия в условиях дефицита поливной воды, высокой засоленности почв и соблюдения государственных квот:

$$\sum_{i=1}^4 [p_i(a_i x_i - b_i x_i^2) - C_i x_i] \rightarrow \max. \quad (1)$$

Система ограничений:

Модель включает девять наборов ограничений, отражающих специфику региона:

1. Площадь земли: суммарная выделенная площадь не превышает доступную (A):

$$\sum_{i=1}^4 x_i \leq A. \quad (2)$$

2. Годовой объём воды: объём на орошение (w_i) и выщелачивание (s_i) в пределах годового лимита [3] (W):

$$\sum_{i=1}^4 (w_i + s_i) x_i \leq W. \quad (3)$$

3. Сезонный спрос на воду: в каждый период t потребность не превышает доступный запас [10] (W_t):

$$\sum_{i=1}^4 w_{it} x_i \leq W_t, \quad \forall t \in \{1, \dots, T\}. \quad (4)$$

4. Удобрения: потребление не превышает запланированный объём поставок [2] (F):

$$\sum_{i=1}^4 f_i x_i \leq F. \quad (5)$$

5. Трудовые ресурсы: потребность в рабочей силе в пределах лимита [6] (L):

$$\sum_{i=1}^4 l_i x_i \leq L. \quad (6)$$

6. Бюджет: производственные затраты в пределах выделенного бюджета [2] (B):

$$\sum_{i=1}^4 c_i x_i \leq B. \quad (7)$$

7. Оборудование: время работы техники не превышает технические ресурсы (M):

$$\sum_{i=1}^4 m_i x_i \leq M. \quad (8)$$

8. Семена: потребность в семенах по каждой культуре в пределах лимита (U_i):

$$u_i x_i \leq U_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (9)$$

9. Государственная квота: площадь под хлопок – не менее 15 гектаров.

$$x_1 \geq 15. \quad (10)$$

10. Неотрицательность: площадь под любую культуру неотрицательна:

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (11)$$

В данной модели переменная x_i (где $i = 1, 2, 3, 4$) обозначает площадь (в гектарах), выделяемую под конкретную сельскохозяйственную культуру: x_1 – хлопчатник, x_2 – пшеница, x_3 – дыня, x_4 – маш. Совокупность этих переменных формирует вектор решения $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, который определяет структуру посевных площадей опытного участка площадью 45 га. Условие (11) $x_i \geq 0$ гарантирует физическую реализуемость решения (отсутствие отрицательных площадей).

Модель объединяет квадратичную целевую функцию и девять групп ограничений: восемь ресурсных (земля, вода, удобрения, труд, бюджет, техника, семена) и одно нормативное, задаваемое аграрной политикой региона (государственная квота на хлопок), плюс условие неотрицательности. Общая процедура оптимизации показана на рисунке 1.

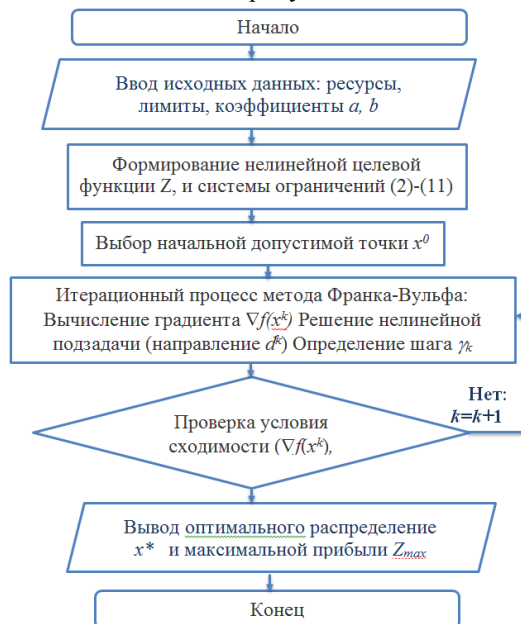


Рисунок 1. Методический алгоритм интегрированной нелинейной оптимизационной модели для района Чимбай.

Для решения задачи нелинейной оптимизации с ограничениями использован метод Франка-Вульфа [4]. Метод подходит для предложенной модели, поскольку обрабатывает линейные ограничения, оптимизируя нелинейную целевую функцию посредством последовательных линейных приближений [5].

Градиент на k -й итерации вычисляется следующим образом:

$$\nabla F(x_i^k) = p_i(a_i - 2b_i x_i^k) - C_i. \quad (12)$$

На каждой итерации решается линейная подзадача для определения направления поиска, после чего выбирается шаг обновления решения:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k (z^k - x^k), \quad 0 \leq \alpha_k \leq 1. \quad (13)$$

Алгоритм решения задачи оптимизации размещения культур (Метод Франка-Вульфа)

Шаг 1. Инициализация. Задать начальное допустимое распределение площадей $x^{(0)} \in D$, удовлетворяющее ограничениям (2)–(11). Установить точность $\epsilon > 0$ и счетчик итераций $k = 0$.

Шаг 2. Линеаризация. Вычислить градиент целевой функции прибыли (1) в текущей точке $x^{(k)}$:

$$\nabla Z(x^{(k)}) = \left(\frac{\partial Z}{\partial x_1}, \frac{\partial Z}{\partial x_2}, \frac{\partial Z}{\partial x_3}, \frac{\partial Z}{\partial x_4} \right)^T \Big|_{x=x^{(k)}}$$

Шаг 3. Решение вспомогательной задачи. Найти вспомогательный вектор площадей $s^{(k)}$, который максимизирует линейную функцию при исходных ограничениях (2)–(10):

$$\max \sum_{i=1}^4 \frac{\partial Z(x^{(k)})}{\partial x_i} \cdot s_i$$

при условии, что $s \in D$ (выполняются все ресурсные лимиты).

Шаг 4. Обновление решения. Определить направление поиска $d^{(k)} = s^{(k)} - x^{(k)}$. Обновить вектор распределения культур:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \gamma_k \cdot d^{(k)}$$

где шаг $\gamma_k = \frac{2}{k+2}$ (или определяется методом одномерного поиска).

Шаг 5. Критерий остановки. Если разрыв двойственности (Gap) $\langle \nabla Z(x^{(k)}), s^{(k)} - x^{(k)} \rangle < \epsilon$, то $x^{(k+1)}$ – оптимальное распределение площадей. Иначе $k = k + 1$ и переход к Шагу 2.

Результаты и обсуждение. Значения параметров определены по местной сельскохозяйственной статистике и квадратичной модели зависимости урожайности от затрат ресурсов (таблица 1).

Таблица 1. Входные параметры и потребности в ресурсах на гектар.

Показатель	Хлопок (x_1)	Пшеница (x_2)	Дыня (x_3)	Маш (x_4)	Общий лимит
Земельный участок, га	1	1	1	1	45
Годовой объём воды ($w_i + s_i$), м ³	6800	4500	4100	2800	220 000
Удобрения (f_i), кг	250	200	150	100	9000
Труд (l_i), человеко-дни	45	25	60	30	2000
Бюджет (c_i), млн сум	13.0	8.5	11.0	7.0	500
Оборудование (m_i), часы	18	12	10	8	600
Норма семян (u_i), кг/га	25	220	4	15	3200
Цена (p_i), млн сум/т	12.5	3.2	4.5	14	-
Коэффициент урожайности (a_i)	3.52	4.00	6.20	1.80	-
Эффект засоления (b_i)	0.06	0.05	0.32	0.04	-

Начиная с допустимой начальной точки, соответствующей равномерному распределению, применён метод Франка–Вульфа. Сходимость достигнута после 8 итераций при заданном допуске (таблица 2).

Таблица 2. Ход итераций и значения целевой функции Z.

Итерация (k)	Хлопок (x_1)	Пшеница (x_2)	Дыня (x_3)	Маш (x_4)	Прибыль Z, млн сум	Разрыв двойственности
0 (начальное значение)	11.25	11.25	11.25	11.25	425.6	82.70
3	14.80	11.50	8.50	10.20	488.2	1.15
5	15.10	11.30	7.30	11.30	502.4	0,042
8 (оптимум)	15.25	11.20	7.15	11.40	512.8	0.00004

Оптимальное распределение ресурсов на экспериментальном участке площадью 45 гектаров выглядит следующим образом:

хлопок (x_1) – 15,25 га (33,9%); пшеница (x_2) – 11,20 га (24,9%); дыня (x_3) – 7,15 га (15,9%); бобы (маш, мунг) (x_4) – 11,40 га (25,3%).

Проверка подтвердила выполнимость решения: все девять групп ограничений удовлетворены – 215 335 м³ воды из 220 000, бюджет 451,9 из 500 млн сум, 8 265 кг удобрений из 9 000, 1 737 из 2 000 человеко-дней, 571,6 из 600 часов работы техники, 3 045 из 3 200 кг семян; квота на хлопок соблюдена.

Базовым (традиционным) вариантом служит равномерное распределение площадей – по 11,25 га под каждую культуру, то есть начальная точка x^0 (итерация 0 в таблице 2). По сравнению с ним нелинейная модель дала общую чистую прибыль 512,8 вместо 425,6 млн сум (+20,5%) при снижении потребления воды на единицу прибыли на 18,8%. Постановка полностью детерминированная: стохастические факторы здесь не рассматриваются.

Это подтверждает, что даже при жёстких ресурсных ограничениях рентабельность может быть существенно повышена средствами нелинейного программирования, а традиционные схемы распределения культур для Каракалпакстана более недостаточны.

Показательная особенность алгоритма – предпочтение разнообразия перед монокультурой: стандартное ЛП часто даёт «угловые решения», когда все ресурсы выделяются одной культуре, тогда как квадратичная модель формирует сбалансированную структуру посевов. Для бассейна Аральского моря диверсификация необходима для поддержания здоровья почвы и защиты фермеров от нестабильности [9].

Заметно расширена площадь под бобовыми (маш, мунг): как засухоустойчивая культура с высокой рыночной стоимостью и умеренной водопотребностью (2 800 м³/га) они наиболее рациональны для климата Чимбая, а переход к бобовым одновременно повышает водопроductивность и увеличивает содержание азота в почве [8]. Квадратичная функция позволила смоделировать снижение урожайности, вызванное засолением,

обеспечив реалистичную оценку предельной доходности в низовьях Амударьи. Допущение о постоянных ценах оставляет пространство для стохастических постановок задачи. (x_4)

Анализ чувствительности при изменении доступности оросительной воды на $\pm 20\%$ и цен на $\pm 30\%$ (таблица 3) показал, что модель особенно чувствительна к росту цен на маш (+11,8% прибыли), а снижение водной квоты на 20% уменьшает прибыль на 9,2%: вода остаётся лимитирующим ресурсом.

Таблица 3. Чувствительность прибыли Z к колебаниям ресурсов и цен.

Сценарий	Изменение прибыли Z (%)	Активное ограничение
Водная квота -20%	-9,2%	Лимит водных ресурсов
Водная квота +20%	+5,4%	Лимит земельной площади
Цена на маш (мунг) +30%	+11,8%	Лимит трудовых ресурсов
Цена на хлопок -30%	-8,5%	Государственная квота ($x_1 \geq 15$)

Закключение. В исследовании разработана и реализована нелинейная оптимизационная модель распределения сельскохозяйственных культур в Чимбайском районе Каракалпакстана. С помощью алгоритма Франка–Вульфа оптимизирован опытный участок площадью 45 гектаров для четырёх стратегических культур при девяти группах ресурсных ограничений.

1. Оптимизированная модель обеспечила чистую прибыль 512,8 млн сум – на 20,5% больше, чем при традиционном подходе, при повышении эффективности водопотребления на 18,8%.

2. Алгоритм на основе метода Франка–Вульфа обеспечил устойчивую сходимость (8 итераций) для рассматриваемой задачи оптимизации с ограничениями.

3. Обоснован переход от жёстких схем севооборота хлопок–пшеница к более ценным и водозэффективным культурам, таким как бобовые (маш, мунг).

Модель предоставляет количественную основу для лиц, принимающих решения, и руководителей фермерских хозяйств Каракалпакстана, стремящихся повысить рентабельность и эффективность использования ресурсов с учётом экологических ограничений региона.

Литература

1. Besbes M., Makhlof M., Hammami S. Optimal resource allocation in agriculture: a nonlinear programming approach. // *European Journal of Operational Research*, 2022, 298(3). – P. 1012-1025.
2. Bobojonov I., Lamers J.P.A., Bekchanov M., Djanibekov N., Martius C., Müller M. Optimization of crop allocation under uncertainty: a case study from Uzbekistan. // *Agricultural Systems*, 2016, 148. – P. 112-121.
3. Chen Y., Zhang W., Li H., Wang J. A nonlinear programming model for optimal irrigation water allocation based on crop water productivity. // *Water Resources Management*, 2023, 37. -P. 2105-2121.
4. Frank M., Wolfe P. An algorithm for quadratic programming. // *Naval Research Logistics Quarterly*, 1956, 3(1-2). – P. 95-110.
5. Jaggi M. Revisiting Frank-Wolfe: Projection-Free Sparse Convex Optimization. // *Proceedings of the 30th International Conference on Machine Learning (ICML)*, 2013, 28. – P. 427-435.
6. Karimov A., Matyakubov B., Hamidov M. Sustainable agricultural practices in Karakalpakstan: challenges of water scarcity. // *Sustainability*, 2024, 16(1). – P. 88.
7. Karimov A., Matyakubov B., Shirokova Y., Okuyama A. Spatial and temporal variation of soil salinity in the lower reaches of the Amu Darya River. // *Arid Land Research and Management*, 2021, 35(3). – P. 261-278.
8. Khaydarov S., Matyakubov B., Karimov A. Optimizing crop rotation patterns for water saving in the Aral Sea region. // *Central Asian Journal of Water Research*, 2022, 8(2). – P. 12-28.
9. Salaev O., Matyakubov B., Karimov A. Climate change impact on water resources and crop yield in the lower reaches of the Amudarya river. // *Environmental Science & Policy*, 2023, 140. –P. 11-23.
10. Zhu X., Zhang J., Zhang X., Liu J. Mathematical modeling of crop yield response to water deficit: a review. // *Agricultural Systems*, 2022, 196. – P. 103325.