

TEGISLIKTEGI LOBACHEVSKIY GEOMETRIYASININ AYIRIM APIWAYI QASIYETLERI

Qutbaev Aydos Bakbergen uly – fizika-matematika ilimleri boyınsha filosofoya doktori

aydosqutbaev@gmail.com

Ajiniyaz atındaǵı Nókis mámleketlik pedagogikalıq instituti

НЕКОТОРЫЕ ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО НА ПЛОСКОСТИ

Кутбаев Айдоc Бакберген улы – доктор философии по физико-математическим наукам

Нукусский государственный педагогический институт имени Ажинияза

SOME SIMPLE PROPERTIES OF THE LOBACHEVSKIAN GEOMETRY ON THE PLANE

Qutbaev Aydos Bakbergen uly – Doctor of Philosophy in Physical and Mathematical Sciences

Nukus State Pedagogical Institute named after Ajiniyaz

Tayanch soʻzlar: Yevklid geometriyasi, toʻgʻri chiziqlar, parallelizm aksiomasi, metrika, burchak defekti.

Rezyume. Maqolada Lobachevskiy geometriyasining (giperbolik geometriya) oddiy va koʻrgazmali xossalari: parallelizm aksiomasi, parallelizm burchagi formulasi, uchburchakning burchak nuqsoni va uning yuza bilan bogʻliqligi, shuningdek, maxsus egri chiziqlar - ekvidistantlar va oritsikl koʻrib chiqiladi. Asosiy tahliliy vositalar sifatida doira ichidagi Puankare modeli va yuqori yarim tekislik modeli qoʻllanilib, ularning metrikalari keltirilgan. Natijada Yevklid geometriyasidan prinsipial farqlari sonli misollarda yaqqol koʻrsatiladi.

Ключевые слова: евклидова геометрия, прямая, аксиома параллельности, метрика, угловой дефект.

Резюме. В данной статье рассматриваются простые и наглядные свойства геометрии Лобачевского (гиперболической геометрии): аксиома параллельности, формула угла параллельности, угловой дефект треугольника и его связь с площадью, а также особые кривые — эквидистанта и орицикл. В качестве основных аналитических инструментов используются модель Пуанкаре в круге и модель верхней полуплоскости, приводятся их метрики. В результате на числовых примерах наглядно демонстрируются принципиальные отличия от евклидовой геометрии.

Key words: Euclidean geometry, straight line, axiom of parallels, metrics, angular defect.

Summary. This article examines simple and intuitive properties of Lobachevskian (hyperbolic) geometry: the axiom of parallels, the formula for the angle of parallelism, the angular defect of a triangle and its relation to area, as well as distinctive curves such as the equidistant curve and the horocycle. The Poincaré disk model and the upper half-plane model serve as the main analytical tools, with their respective metrics presented. As a result, the fundamental differences from Euclidean geometry are illustrated through concrete numerical examples.

Kirisiw. Evklidlik emes geometriyanın jaratılıwı XIX ásirdeń eń iri intellektualıq jarılıwların birı boldı. Belgili rus matematigi N.I.Lobachevskiy birinshi bolıp Evklidtiń besinshi aksiomasi basqasına almasırılǵan qatań sistemanı qurdı [1]. Onıń jumısları geometriyanıń aksiomatikalıq strukturası hár túrli bir-birine qayshı kelmeytuǵın variantların múmkinshiligin kórsetip berdi hám sonıń menen birge matematikalıq bilimniń tábiyatı haqqındaǵı kóz-qaraslardı túpten ózǵertip jiberdi [2].

Ádebiyatlar analizi hám metodologiya. Lobachevskiy geometriyasın izertlew N.I.Lobachevskiydiń original miynetlerinen baslap házirgi kúnge deyin bay tariyxqa iye. Onıń jumısları giperbolalıq tegislikti hám parallelizm aksiomasın túsiniw ushın tiykar jarattı. Keyin ala, Lobachevskiydiń ideyaları K.F.Gausstıń miynetlerinde óziniń rawajın taptı. Ol jeke izertlewlerin basıp shıǵarmaǵan bolsa da, Evklidlik emes geometriya koncepciyasın qalıplestiriwde úlken tásir kórsetti [8].

XX ásirde giperbolalıq geometriyanı sistematalıq jetkerip beriw V.I.Belyaev [3] hám V.G.Boltyanskiylerdiń miynetlerinde usınıldı. Bul miynetlerde úshmúyeshliklerdiń, parallellerdiń hám maydanlardıń elementarlıq qásiyetlerine ayrıqsha dıqqat awdarılǵan. Al Andersonnıń monografiyası [6] hám Retkliftiń fundamentallıq miyneti [7] sıyaqlı zamanagóy oqıwlıqlar bolsa giperbolalıq geometriyanı topologiya hám kópobrazlıqlar teoriiyası konteksinde qaraydı. Sonday-aq Tyorston [8] jáne Birdon [9] lardıń jumısları giperbolalıq geometriyanı diskret gruppalar teoriiyası hám betliklerdegi dinamika menen baylanıstıradı.

Metodologiyalıq jaqtan usınılıp atırǵan maqalamız klassikalıq hám zamanagóy dereklerdiń salıstırmalı analizine súyenedi. Tiykarǵı itibar giperbolalıq tegisliktiń

jeńil túrde bayan etiwge bolatuǵın apiwayı qásiyetlerine qaratıladı, yaǵnıy parallelizm aksiomasi, Puankare modelleri, úshmúyeshliklerdiń hám arnawlı iymeklerdiń qásiyetleri sıyaqlılar. Bunday jantasıw Lobachevskiydiń fundamentallıq ideyalarınń zamanagóy izertlewlerde qalay óz sáwlesin tabatuǵının kórsetiwge múmkinshilik beredi.

Talqlaw. Giperbolalıq geometriyanıń Evklid geometriyasınan tiykarǵı ózgesheligi parallel tuwrılardıń ózin tutıwında bolıp esaplanadı. Evklid tegisliginde berilgen tuwrıda jatpaytuǵın noqattan bul tuwrıǵa parallel bolǵan birden-bir tuwrı sıziq ótedi. Al, Lobachevskiy geometriyasında berilgen l tuwrıda jatpaytuǵın A noqat arqalı sheksiz kóp parallel tuwrı sıziq ótedi.

Parallelizm múyeshi mına formula menen ańlatıladı:

$$\Pi(d) = 2\arctan(e^{-d}), \quad (1)$$

bul jerde, d - berilgen tuwrı sıziq penen noqat arasındǵı qashıqlıq. Bul formula eń dáslep Lobachevskiydiń miynetlerinde, keyin ala Belyaevtiń jumlarında tolıq qarastırıldı.

Giperbolalıq geometriya menen ámeliy islesiw ushın modellerden paydalanadı. Model degende biz tiykarǵı universal kóplik hám ondaǵı noqat, sıziqlar sıyaqlı geometriyalıq obyektlerdi tańlawdı názerde tutamız. Biz ayırım modellerdi sanap ótiw menen sheklenemiz:

1) **Dóngelektegi Puankare modeli.** Bul model keyinrek usınılǵan bolıp, Puankare hám Koksterlerdiń jumısları sebepli keń qollanıwǵa iye boldı. Bul modelde noqatlar dóngelektiń ishindegi noqatlar, al shegaraǵa ortogonal bolǵan sheńber doǵaları tuwrı sıziqlar sıpatında alıp qaraladı. Múyeshlerdiń saqlanıwı modeldi súwretlew ushın qolaylı qıladı [4].

2) **Joqarı yarım tegislik modeli.** Modeldiń tiykarǵı kópligi sıpatında ádettegi Evklid tegisligindegi joqarı yarım

tegislík qarastırıladı. Bul model ásirese analitikalıq máselelerde keń qullanıladı. Metrika tómendegi formula arqalı anıqlanadı:

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}. \quad (2)$$

Model haqqında tolıq maǵlıwmat [3] ádebiyatta berilgen.

Lobachevskiy geometriyasındaǵı qálegen úshmúyeshliktiń ishki múyeshleriniń qosındısı barqulla π den kishi. $\delta = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ ayırmaǵa *múyeshli defekt* dep aytıladı.

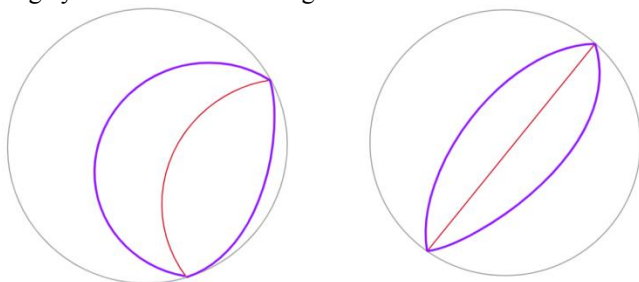
Jáne bir qızıqlıq qásiyetlerdiń biri úshmúyeshliktiń maydanı múyeshler arqalı ańlatıladı:

$$S = R^2 \delta, \quad (3)$$

bul jerde R - tegisliktiń qıysılıq radiusı [7].

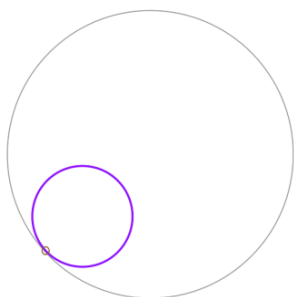
Giperbolalıq geometriyanıń jáne bir tań qalarlı qásiyetlerinen biri bul ondaǵı ekvidistanta hám oricikl sıyaqlı ayırıqsha iymek sıızılqar bolıp esaplanadı. Bunday sıızılqar Tyorstonniń jumısında tolıq bayan etilgen [8].

Ekvidistanta – bul berilgen tuwrıdan belgili bir qashılıqta jatıwshı noqatalardıń geometriyalıq ornınan ibarat iymek sıızılq. Mısalı, Puankareniń dóńgelekтеgi modelinde ekvidistanta – bul aqırları absolyutte jaylasqan doǵa yamasa diametr bolmaǵan xorda boladı.



1-súwret. Ekvidistantalar
(Puankareniń dóńgelekтеgi modelinde).

Oricikl – bul modelдеgi shegaralıq noqatqa urınıwshı iymek sıızılq. Ol diskret gruppalar teoriyasında áhmiyetli rol oynaydı [9].



2-súwret. Oricikl
(Puankareniń dóńgelekтеgi modelinde).

Joqarı yarım tegisliktegi modelde qashılıq tómendegi formula arqalı anıqlanadı:

$$d(z_1, z_2) = \arccos\left(1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2 \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2}\right). \quad (4)$$

Bul formula Lobachevskiy geometriyasın analitikalıq metodlar menen baylanıstıradı [6].

Nátiyjeler. Endi bul ádettegedey bolmaǵan geometriyada qalay jumıs islew kerek ekenin sáwlelendiretuǵın bir neshe mısál hám máselelerdi kórip shıǵayıq.

1-mısál. Giperbolalıq tegislikte berilgen tuwrı menen noqat arasındaǵı qashılıq $d=1$ bolǵanda paralellik múyeshin tabıń.

Tuwrıdan-tuwrı (1) formuladan paydalanamız:

$$\Pi(d) = 2 \operatorname{arctg}(e^{-1}) \approx 2 \operatorname{arctg}(0.3679) \approx 40.3^\circ.$$

Bul mısál arqalı biz formulanıń qalay sanlı real nátiyjege alıp keletuǵının kóriwimizge boladı. Jáne qızıqlıq tárepi sonnan ibarat, eger $d \rightarrow 0$ bolsa, onda $\Pi(d) \rightarrow \pi/2$ qatnasqa iye bolamız, yaǵnıy giperbolalıq geometriya lokal túrde Evklid geometriyasına uqsas boladı.

2-mısál. Ishki múyeshleri $\alpha = 50^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 40^\circ$ bolǵan úshmúyeshlikti qarastırayıq. Bul úshmúyeshliktiń múyeshli defekti (2) formula boyınsha

$$\delta = \pi - (\alpha + \beta + \gamma) = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ = \pi/6.$$

Eger tegisliktiń qıysılıǵın $R=1$ dep alsaq, onda berilgen úshmúyeshliktiń maydanı $S = R^2 \delta = \pi/6 \approx 0,524$.

3-mısál. Meyli joqarı yarım tegisliktegi modeldi qarastırayıq. Berilgen $z_1 = i$ hám $z_2 = 2i$ noqatlar arasındaǵı qashılıqtı tabıw talap etilsin. Onda (4) formuladan paydalanıp, tómendegige iye bolamız

$$d(z_1, z_2) = \arccos\left(1 + \frac{|i - 2i|^2}{2 \cdot 1 \cdot 2}\right) = \arccos 1,25 \approx 0,693.$$

Bul mısál metrikanıń ámeliy qollanıwın hám qashılıqtı sanlı esaplaw usılın kórsetedi.

Juwmaq. Hátteki ápiwayı faktler, atap aytqanda, paralleller kópligi, múyeshli defekt, ádettegedey emes iymeklikler giperbolalıq dúnyanıń baylıǵın sáwlelendiredi. Lobachevskiy geometriyası zamanagóy matematika hám fizikanıń fundamenti boldı.

Juwmaqlap aytqanda, Lobachevskiy geometriyası tek ǵana matematikalıq abstrakciya emes, al zamanagóy matematika, fizika hám kompyuter grafikası (mısalı, mashina tálimindegi giperbolalıq keńislikler) sıyaqlı tarawlardıń fundamenti bolıp tabıladı. Onıń ápiwayı, biraq tereń qásiyetlerin úyreniw bizge klassikalıq Evklid dúnyasınan tısqarı jańa matematikalıq gorizontlardı ashıp beredi.

Ádebiyatlar

1. Лобачевский Н.И. Воображаемая геометрия. – Казань: 1835.
2. Лобачевский Н. И. Новые начала геометрии с полной теорией параллельных. – Казань: 1835–1838.
3. Беляев В. И. Геометрия Лобачевского. – Москва: МГУ, 1986.
4. Берже М. Геометрия. Том 1: Планиметрия. – Москва: «Мир», 1984.
5. Coxeter H. S. M. Non-Euclidean Geometry. – Toronto: University of Toronto Press, 1998.
6. Anderson J. W. Hyperbolic Geometry. – Springer, 2005.
7. Ratcliffe J. Foundations of Hyperbolic Manifolds. – Springer, 2006.
8. Thurston W. Three-Dimensional Geometry and Topology. – Princeton University Press, 1997.
9. Beardon A. The Geometry of Discrete Groups. – Springer, 1983.