

UDK: 517.54

DURÍS ÚSHMÚYESHLIKTŇ SÍRTQÍ OBLASTÍNA KONFORM SÁWLELENDIRIW

Kalbaev Sultanbek Nazerbaevich – *assistent oqıtıwshı*

kalbayev.96@mail.ru

Jaksibaev Sultanbek Amangeldi ulı – *magistrant*

Ájiniyaz atındaǵı Nókis mámleketlik pedagogikalıq institutı

КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ НА ВНЕШНОСТЬ ПРАВИЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Калбаев Султанбек Назербаевич – *ассистент преподаватель*

Джаксыбаев Султанбек Амангельдиевич – *магистрант*

Нукусский государственный педагогический институт имени Ажинияза

CONFORMAL MAPPING ONTO THE EXTERIOR OF A REGULAR TRIANGLE

Kalbaev Sultanbek Nazerbaevich – *assistant teacher*

Jaksibaev Sultanbek Amangeldi ulı – *master's student*

Nukus State Pedagogical Institute named after Ajiniyaz

Tayanch so‘zlar: konform akslantirish, Kristoffel-Shvars integrali, muntazam uchburchak, sohaning tashqi ko‘rinishi, logarifmik sig‘im, konform radius, transfiniit diametr, gamma-funksiya, kompleks tekislik, ideal suyuqlik oqimi, potensial nazariyasi.

Rezyume. Maqolada birlik doira tashqarisidagi sohaning ($|z| > 1$ oblastın) teng tomonli uchburchak tashqarisidagi sohaga (chegaralanmagan sohaga) konform akslantirilishi o‘rganiladi. Akslantirish funksiyasi Kristoffel-Shvars integralining tashqi soha uchun mo‘ljallangan ko‘rinishi yordamida keltirib chiqariladi, darajali qatorga yoyiladi va uning xossalari tahlil qilinadi. Uchburchakning logarifmik sig‘imi (konform radiusi) $\Gamma(1/3)$ transsendent o‘zgarma miqdor – orqali ifodalanishi ko‘rsatiladi: $R/C = \frac{2}{3}B(2/3, 2/3) = \frac{8\pi^2}{3\Gamma(1/3)^3} \approx 1.3689$. Amaliy tatbiq sifatida uchburchak atrofida ideal

suyuqlik oqimi tasvirlanadi. Tadqiqotda kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar geometrik nazariyasi, Kristoffel-Shvars integrali, qatorga yoyish va kompyuter vizualizatsiyasi usullaridan foydalaniladi.

Ключевые слова: конформное отображение, интеграл Кристоффеля–Шварца, правильный треугольник, внешность области, логарифмическая ёмкость, конформный радиус, трансфинитный диаметр, гамма-функция, комплексная плоскость, течение идеальной жидкости, теория потенциала.

Резюме. В статье рассматривается конформное отображение внешности единичного круга (области $|z| > 1$) на внешность (неограниченную область) правильного треугольника. Отображающая функция выводится с помощью внешней формы интеграла Кристоффеля–Шварца, разлагается в степенной ряд, и анализируются её свойства. Показано, что логарифмическая ёмкость (конформный радиус) треугольника выражается через трансцендентную постоянную $\Gamma(1/3)$: $R/C = \frac{2}{3}B(2/3, 2/3) = \frac{8\pi^2}{3\Gamma(1/3)^3} \approx 1.3689$. В качестве физического приложения проиллюстриро-

вано течение идеальной жидкости, обтекающей треугольник. В исследовании использованы методы геометрической теории функций комплексного переменного, интеграл Кристоффеля–Шварца, разложение в ряд и компьютерная визуализация.

Key words: conformal represcuting, Christoffel–Schwarz integral, regular triangle, exterior domain, logarithmic capacity, conformal radius, transfinite diameter, gamma function, complex plane, ideal fluid flow, potential theory.

Summary. This article considers the conformal mapping of the exterior of the unit disk (the domain $|z| > 1$) onto the exterior (unbounded) domain of a regular triangle. The mapping function is derived using the exterior form of the Christoffel–Schwarz integral, expanded into a power series, and its properties are analysed. It is shown that the logarithmic capacity (conformal radius) of the triangle is expressed through the transcendental constant $\Gamma(1/3)$:

$R/C = \frac{2}{3}B(2/3, 2/3) = \frac{8\pi^2}{3\Gamma(1/3)^3} \approx 1.3689$. As a physical application, the ideal fluid flow past the triangle is illustrated. The

study employs methods of the geometric theory of functions of a complex variable, the Christoffel–Schwarz integral, series expansion, and computer visualization.

Kirisiw. Konform sáwlelendiriwler kompleks analizdın eń kúshli qurallarınan biri bolıp, quramalı formalı oblastlardı esaplawǵa qolaylı ápiwayı oblastlarǵa (dóńgelek yamasa yarım tegislik) keltiriwge múmkinshilik beredi. Kópmúyeshlik formalı oblastlar ushın bunday sáwlelendiriw Kristoffel-Shvarc integralı arqalı ámelge asırıladı. Bul formula 1867-jılı E.B.Kristoffel hám 1869-jılı G.A.Shvarc tárepinen gárezsiz túrde alınǵan. Ol házirgi waqıtta gidrodinamika, elektrostatika hám jıllılıq ótkizgishlik teoriyasınıń tiykarǵı máselelerin sheshiwde keń qollanıladı.

Kristoffel-Shvarc integralınıń kópmúyeshlik ishine sáwlelendiriwshi (ishki) túri jaqsı úyrenilgen. Biraq, kóp fizikalıq máselelerde – misalı, deneni aylanıp aǵıwshı aǵıstı yamasa zaryadlangan ótkizgishtıń sırtındaǵı maydandı esaplawda – kópmúyeshliktiń sırtqı (shegaralanbaǵan) oblastına sáwlelendiriw talap etiledi. Sırtqı sáwlelendiriw ishki jaǵdaydan eki tiykarǵı ózgeshelikke iye: dáreje kórsetkishleri burılıs múyeshlerine aylanadı hám sheksizliktiń durıs sáwleleniwini ($F(\infty) = \infty$) támiyinlewshi qosımsha kóbeytiwshi payda boladı. Sonıń menen birge,

sırtqı sáwlelendiriwdiń bas koefficienti oblasttıń logarifmlik sıyımlılıǵın (konform radiusın) beredi – bul potencial teoriyasınıń áhmiyetli shaması.

Jumistıń maqseti – birlik dóńgelektiń sırtın durıs úshmúyeshliktiń sırtqı oblastına konform sáwlelendiriwshi funkciyanı Kristoffel-Shvarc integralı járdeminde keltirip shıǵarıw, onı dárejeli qatarǵa jayıw, úshmúyeshliktiń sıyımlılıǵın $\Gamma(1/3)$ turaqlısı arqalı ańlatıw hám nátiyjeni ideal sıyıqlıq aǵısı mısasında kórsetiw bolıp tabıladı. Izertlewde kompleks ózgeriwshili funkciyalar geometriyalıq teoriyasınıń usılları, Kristoffel-Shvarc integralı, qatarǵa jayıw hám kompyuterlik vizualizaciya usılları qollanıldı.

Kristoffel-Shvarc formulası hám onıń sırtqı túri

Kristoffel-Shvarc teoreması boyınsha, joqarı yarım tegislikti (yamasa birlik dóńgelekti) tóbelerindegi ishki múyeshleri $\alpha_k \pi$ bolǵan kópmúyeshliktiń ishine sáwlelendiriwshi funksiya tómendegishe ańlatıladı:

$$f(z) = c_1 \int \prod_{k=1}^n (\zeta - a_k)^{\alpha_k - 1} d\zeta + c_2 \quad (1)$$

Bul jerde a_k — tóbelerdiń proobrazları, c_1, c_2 — kompleks turaqlılar. Kópmúyeshliktiń sırtqı oblastına sáwlelendiriw ushın bul formula eki jaǵınan ózgeredi: dáreje kórsetkishleri ishki múyeshiń ornına sırtqı (burılıs) múyeshine — $\alpha_k - 1$ ornına $1 - \alpha_k$ ge — aylanadı, hám sheksizliktiń durıs sáwleleniwini ($F(\infty) = \infty$) támiyinlew ushın qosımsha ζ^{-2} kóbeytiwshi payda boladı:

$$F(z) = c_1 \int \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{a_k}{\zeta}\right)^{1 - \alpha_k} d\zeta + c_2 \quad (2)$$

$$\text{Bul formula } F(z) = c_1 \int \zeta^{-2} \prod_k (\zeta - a_k)^{1 - \alpha_k} d\zeta + c_2$$

kórinisine teń — bul jerdegi ζ^{-2} kóbeytiwshi hám onı dáreje kórsetkishi sırtqı jaǵdaydıń ishki jaǵdaydan tiykarǵı ayırmashılıǵı bolıp tabıladı.

Durıs kópmúyeshliktiń sırtı

Durıs n -múyeshlikte hár bir sırtqı múyesh (burılıs múyeshi) $1 - \alpha_k = 2/n$ ge teń. Tóbelerdiń proobrazları — birlik túbirler $a_k = e^{2\pi i k/n}$, olar ushın $\prod_k (1 - a_k / \zeta) = 1 - \zeta^{-n}$. Sonlıqtan sırtqı sáwlelendiriw formulası durıs kópmúyeshlik ushın tómendegi ápiwayı kóriniske keledi:

$$F(z) = C \int (1 - \zeta^{-n})^{2/n} d\zeta \quad (3)$$

$n = 3, 4, 5, 6$ mánislerinde sáykes úshmúyeshlik, tórtmúyeshlik, besmúyeshlik hám altımúyeshliktiń sırtı payda boladı. n sheksiz artqanda $(1 - \zeta^{-n})^{2/n} \rightarrow 1$, $F(z) \rightarrow Cz$, yaǵnıy sáwlelendiriw sheńberdiń sırtına (birdey aǵısqa) aylanadı.

Durıs úshmúyeshliktiń sırtına sáwlelendiriw

$n = 3$ jaǵdayında dáreje kórsetkishi $+2/3$ ge teń boladı (ishki jaǵdaydaǵı $-2/3$ ten ayırmashılıǵına itibar berin), al proobrazlar — ushten bir birlik túbirler $1, \omega, \omega^2$, bul jerde $\omega = e^{2\pi i/3}$. Bul túbirler ushın $(\zeta - 1)(\zeta - \omega)(\zeta - \omega^2) = \zeta^3 - 1$. Sonlıqtan:

$$F(z) = C \int \sqrt[3]{(1 - \zeta^{-3})^2} d\zeta \quad (4)$$

Bul funksiya elementar emes. Integral astındaǵı funkciyanı Nyuton binomı boyınsha ζ^{-1} dárejeleri boyınsha jayamız:

$$(1 - \zeta^{-3})^{2/3} = 1 - \frac{2}{3}\zeta^{-3} - \frac{1}{9}\zeta^{-6} - \frac{4}{81}\zeta^{-9} - \frac{7}{243}\zeta^{-12} - \dots$$

aǵzama-aǵza integrallap, sırtqı sáwlelendiriwshi funkciyanıń qatarın alamız ($|z| > 1$ de jıyanaqlı):

$$F(z) = C \left(z + \frac{z^{-2}}{3} + \frac{z^{-5}}{45} + \frac{z^{-8}}{162} + \frac{7z^{-11}}{2673} + \dots \right) \quad (5)$$

Sıyımlılıq (konform radius) ham Γ turaqlısı

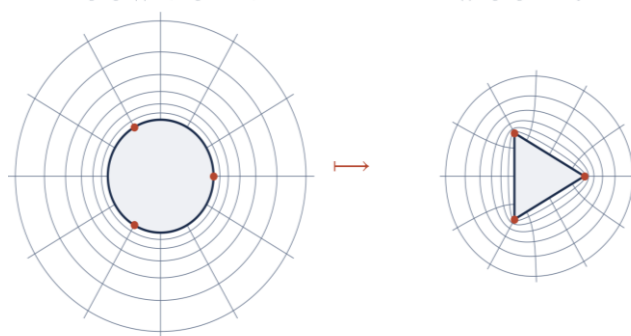
Sheksizlik átirapında $F(z) = Cz + \dots$ bolǵanlıqtan, C turaqlısı úshmúyeshliktiń logarifmlik sıyımlılıǵın (konform radiusın) bildiredi — bul potencial teoriyasınıń tiykarǵı shaması. Tóbeniń obrazı $F(1)$ hám sıyımlılıq C arasındaǵı qatnas beta-funksiya arqalı dál ańlatıladı:

$$\frac{R}{C} = \frac{2}{3} B\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{8\pi^2}{3\Gamma(1/3)^3} \approx 1.3689 \quad (6)$$

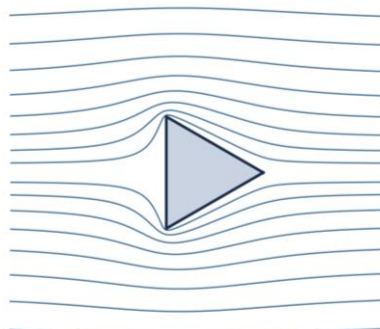
Bul jerde R — úshmúyeshliktiń sırtına sızilǵan sheńberdiń radiusı. Demek, úshmúyeshliktiń sıyımlılıǵı $C = \frac{3\Gamma(1/3)^3}{8\pi^2} R \approx 0.7305R$. Kórip turǵanıımızday, ishki jaǵdaydaǵıday, sırtqı jaǵdayda da nátiyje $\Gamma(1/3)$ transcendent turaqlısı arqalı ańlatıladı: ishki jaǵdayda $\int_0^1 (1-t^3)^{-2/3} dt = \frac{1}{3} B(1/3, 1/3) = \frac{\Gamma(1/3)^3}{2\sqrt{3}\pi} \approx 1.7666$, sırtqı jaǵdayda bolsa $B(2/3, 2/3)$ payda boldı. Bul $\Gamma(1/3) \approx 2.6789$ turaqlısı analizde keń ushırasadı.

z -tegisligi: $|z| > 1$ (dóńgelek sırtı)

$w = F(z)$ -tegisligi: úshmúyeshlik sırtı



1-súwret. Birlik dóńgelektiń sırtın ($|z| > 1$) durıs úshmúyeshliktiń sırtqı oblastına konform sáwlelendiriw. Sol tárepte — z -tegisliktegi sırtqı polyar tor; oń tárepte — sonıń $w = F(z)$ astındaǵı obrazı.



2-súwret. Durıs úshmúyeshlikti aylanıp ağıwshı ideal suyıqlıqtıń ağıs sızıqları (F arqalı esaplangan). Sızıqlar sheksizlikte birdey ağısqa aylanıp, deneni tegis orap ótedi.

Maǵlıwmat ushin: Sırtqı Kristoffel-Shvarc sáwlelendiriwi deneni aylanıp ağıwshı ağıstı (aerodinamikada — profillerdi aylanıp ağıw, Jukovskiy teoriyası), zaryadlangan ótkizgish kópmúyeshliktiń sırtındaǵı elektrostatikalıq maydandı hám jıllılıq tarqalıwın esaplawda qollanıladı. Sıyımlılıq shaması C bul máselelerde deneniń elektrostatikalıq sıyımlılıǵı menen tıǵız baylanıslı.

Juwmaq. Bul jumısta birlik dóńgelektiń sırtın durıs úshmúyeshliktiń sırtqı oblastına konform sáwlelendiriwshi funkciya Kristoffel-Shvarc integralınıń sırtqı túri járdeminde alındı hám dárejeli qatarǵa jayıldı. Úshmúyeshliktiń logarifmlik sıyımlılıǵı (konform radiusı) $\Gamma(1/3)$ transcendent turaqlısı arqalı dál ańlatıldı:

$$R/C = \frac{2}{3}B(2/3, 2/3) = \frac{8\pi^2}{3\Gamma(1/3)^3} \approx 1.3689.$$

Alınǵan nátiyjeler deneni aylanıp ağıwshı ideal suyıqlıq ağısı misalında kórsetildi. Usı usıl qálegen durıs kópmúyeshliktiń sırtına sáwlelendiriwge de qollanıla aladı.

Ádebiyatlar

1. Иванов В.И., Попов В.Ю. Конформные отображения и их приложения. – Москва: Едиториал УРСС, 2002.
2. Шабат Б.В., Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного. – Москва: «Наука», 1987.
3. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. – Москва: «Физматлит», 1999.
4. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. – Москва: «Наука», 1966.