

O‘QQA NISBATAN SIMMETRIK JISMLARDA ISSIQLIK TARQALISHINING NOSTATSIONAR MASALASINI CHEKLI ELEMENTLAR USULIDA KOMPYUTERLI MODELLASH TIRISH

Sapayev Shixnazar Omon o‘g‘li – *texnika fanlari bo‘yicha falsafa doktori*

Abu Rayhon Beruniy nomidagi Urganch davlat universiteti

sapoyev.nazarbek@gmail.com

Matyakubov Marks Yaxshimuradovich – *katta o‘qituvchi*

Muhammad al-Xorazmiy nomidagi Toshkent axborot texnologiyalari universiteti

marks2902226@mail.ru

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛАХ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Сапаев Шихназар Омонович – *доктор философии по техническим наукам*

Ургенчский государственный университет имени Абу Райхана Беруни

Матякубов Маркс Яхшимурадович – *старший преподаватель*

Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада ал-Хорезми

COMPUTER MODELING OF TRANSIENT HEAT CONDUCTION IN AXISYMMETRIC BODIES USING THE FINITE ELEMENT METHOD

Sapayev Shikhnazar Omonovich – *PhD in Technical Sciences*

Urgench State University named after Abu Rayhan Beruniy

Matyakubov Marks Yakhshimuradovich – *Senior Lecturer*

Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi

Tayanch so‘zlar: nostatsionar, chekli elementlar usuli, shakl funksiya, diskret model, gradiyent matritsa.

Rezyume. Maqolada chekli elementlar usuliga asoslanib, o‘qqa nisbatan simmetrik jismlarda issiqlik tarqalishining nostatsionar jarayonlarini tahlil qilish ko‘rib chiqilgan. Masala jism kesimi orqali ekvivalent ikki o‘lchovli ko‘rinishga keltirilgan. Ushbu yondashuv asosida sonli model shakllantirilib, masalani yechish algoritmi ishlab chiqilgan hamda uning dasturiy ta‘minoti yaratilgan.

Ключевые слова: нестационарный, метод конечных элементов, функция формы, дискретная модель, градиентная матрица.

Резюме. В статье рассмотрен анализ нестационарных процессов теплопроводности в осесимметричных телах на основе метода конечных элементов. Задача приведена к эквивалентной двумерной постановке через сечение тела. На основе данного подхода сформирована численная модель, разработан алгоритм решения задачи и создано его программное обеспечение.

Key words: non-stationary, finite element method, shape function, discrete model, gradient matrix.

Summary. The paper considers the analysis of transient heat conduction processes in axisymmetric bodies based on the finite element method. The problem is reduced to an equivalent two-dimensional formulation through the cross-section of the body. Based on this approach, a numerical model is developed, a solution algorithm is designed, and corresponding software is implemented.

Kirish. Hozirgi kunda issiqlik almashinuvi jarayonlarini chuqur o‘rganish va ularni aniq modellash tirish muhandislik, energetika, materialshunoslik hamda qurilish sohalarida muhim ahamiyat kasb etmoqda. Ayniqsa, murakkab geometrik shaklga ega bo‘lgan va o‘qqa nisbatan simmetrik jismlarda issiqlik tarqalishining nostatsionar (vaqtga bog‘liq) jarayonlarini tahlil qilish dolzarb masalalardan biridir. Bunday masalalarda analitik yechimlarni olish ko‘pincha qiyin yoki umuman imkonsiz bo‘lib, sonli usullardan foydalanish zarurati tug‘iladi [1].

Ushbu maqolada chekli elementlar usuli (ChEU) asosida uch o‘lchovli, o‘qqa nisbatan simmetrik jismlarda issiqlik tarqalishining nostatsionar masalalarini yechish uchun sonli model ishlab chiqildi. Masalani hal etish algoritmi ishlab chiqilib, unga mos dasturiy ta‘minot yaratildi. Shuningdek, murakkab o‘qqa nisbatan simmetrik jismlarning geometrik xususiyatlari harorat maydoniga qanday ta‘sir ko‘rsatishi tahlil qilindi.

Masalaning qo‘yilishi. O‘qqa nisbatan simmetrik jismda nostatsionar issiqlik tarqalish masalasi vaqtga bog‘liq holda o‘rganiladi. Jism silindrik koordinatalar tizimida (r, z) o‘zgaruvchilar orqali ifodalanadi va

temperatura faqat radius r , balandlik z hamda vaqt t ga bog‘liq deb olinadi, ya‘ni:

$$T = T(r, z, t),$$

Issiqlik tarqalishining nostatsionar jarayoni quyidagi issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi bilan ifodalanadi [2]:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q(r, z, t) \quad (1)$$

bu yerda ρ - jism zichligi, c - issiqlik sig‘imi, λ - issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsiyenti, $Q(r, z, t)$ - ichki issiqlik manbai, r - jism ichidagi nuqtaning o‘qqa nisbatan masofasi.

Masalaning muayyan yechimi aniqlash uchun boshlang‘ich va chegaraviy shartlari ko‘rsatilishi berish kerak.

Boshlang‘ich shart $t_0 = 0$ vaqtda jismning temperaturasi:

$$T(r, z, 0) = T_0(r, z),$$

O‘q bo‘ylab simmetriya chegaraviy sharti ($r = 0$), ya‘ni issiqlik oqimi o‘q orqali o‘tmaydi:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0,$$

Jism sirt yuzasida (S) quyidagi shartlardan biri berilishi mumkin:

birinchi turdagi (Dirixle sharti) chegaraviy shart:

$$T = T_s(r, z, t), \quad (2)$$

ikkinchi turdagi (Neyman sharti) chegaraviy shart:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = q_s, \quad (3)$$

uchunchi turdagi (Nyuton sharti) chegaraviy shart:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha(T - T_\infty), \quad (4)$$

bu yerda α - issiqlik almashinish koeffitsiyenti, T_∞ - tashqi muhit harorati.

Shu holatda, (1)-tenglama va (2) - (4) - chegaraviy shartlar asosida hosil bo'lgan sistema quyidagi funksionalni minimallashtirish orqali yechiladi [3]:

$$\Phi(r, z) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} r \lambda \left(\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right) - r Q T + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} T \right] d\Omega + \quad (5)$$

$$+ \int_{S_1} \frac{1}{2} q_s T dS + \int_{S_2} \frac{1}{2} \alpha (T - T_\infty)^2 dS$$

bu yerda Ω - hajm; S_1 - issiqlik oqimi berilgan sirt yuzasi; S_2 - konvektiv issiqlik almashinuvi sodir bo'ladigan sirt yuzasi.

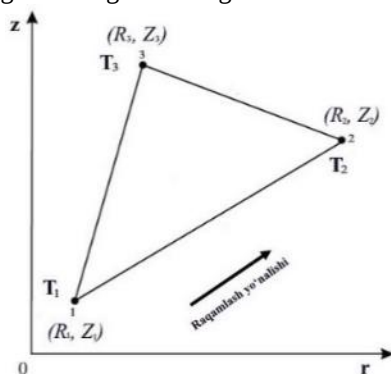
Masalani chekli elementlar usulida yechimi. ChEU usulida masala yechilganda, o'qqa nisbatan simmetrik jism kesimi n ta chekli elementlarga ajratiladi. Bu elementlar odatda uchburchak shaklda tanlanadi (1-rasm). Keyingi barcha formulalar aynan uchburchak shaklli chekli elementlar uchun keltiriladi. Butun soha funksionali esa barcha chekli elementlar funksionallarining yig'indisi ko'rinishida ifodalanadi. Natijada, (5)-tenglama quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\Phi(r, z) = \sum_{e=1}^n \left[\frac{1}{2} \cdot \int_{\Omega^{(e)}} \{g^{(e)}\}^T \cdot [D^{(e)}] \cdot \{g^{(e)}\} d\Omega - \int_{V^{(e)}} \left(r Q^{(e)} - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \right) \cdot T^{(e)} dV \right] + \quad (6)$$

$$+ \sum_{e=1}^n \left[\int_{S_1^{(e)}} T^{(e)} \cdot q_s^{(e)} dV + \int_{S_2^{(e)}} \frac{1}{2} \cdot [(T^{(e)} - T_\infty)^2] \cdot \alpha^{(e)} dS \right]$$

$$[D^{(e)}] = \begin{bmatrix} r\lambda^{(e)} & 0 \\ 0 & r\lambda^{(e)} \end{bmatrix} - \text{issiqlik o'tkazuvchanlik matritsasi.}$$

Bunday holda, $r = (r_1 + r_2 + r_3)/3$ simmetriya o'qidan elementning markazigacha bo'lgan masofani anglatadi.



1-rasm. Uchburchak chekli element

(e) chekli element ichida harorat taqsimoti tugunlardagi qiymatlar orqali ifodalanadi:

$$T^{(e)} = N(r, z)T(t), \quad (7)$$

yoki matritsa shaklida:

$$T^{(e)} = [N_1(r, z) N_2(r, z) N_3(r, z)] \begin{Bmatrix} T_1(t) \\ T_2(t) \\ T_3(t) \end{Bmatrix}, \quad (8)$$

Funksionalning ekstremumga ega bo'lish sharti har bir chekli element uchun quyidagi differensial tenglamalar sistemasini keltirib chiqaradi:

$$[c^{(e)}] \frac{\partial \{T\}}{\partial t} + [k^{(e)}] \{T\} + \{f^{(e)}\} = 0, \quad (9)$$

bu yerda

$$[c^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} \rho c [N^{(e)}] [N^{(e)}]^T dV, \quad (10)$$

$$[k^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}] [D^{(e)}] [B^{(e)}]^T dV + \int_{S_2} \alpha [N^{(e)}] [N^{(e)}]^T dS, \quad (11)$$

$$\{f^{(e)}\} = - \int_{\Omega^{(e)}} (rQ) [N^{(e)}]^T d\Omega + \int_{S_1} q_s [N^{(e)}]^T dS - \int_{S_2} \alpha T_\infty [N^{(e)}]^T dS, \quad (12)$$

bu yerda

$\Omega^{(e)}$ - chekli element hajmi;

$[N^{(e)}]$ - shakl funktsiyalarini o'z ichiga olgan matritsa;

$[B^{(e)}]$ - shakl funksiyasining hosilalarini o'z ichiga olgan matritsa.

O'qqa nisbatan simmetrik jismda nostatsionar issiqlik tarqalish masalasini yechishda integral (10) quyidagi shaklga ega bo'ladi (issiqlik sig'imi matritsasi):

$$[c^e] = \frac{2\pi\lambda A}{180} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

bu yerda

$$c_{11} = 12r_1^2 + 2r_2^2 + 2r_3^2 + 6r_1r_2 + 6r_1r_3 + 2r_2r_3,$$

$$c_{12} = c_{21} = 3r_1^2 + 3r_2^2 + r_3^2 + 4r_1r_2 + 2r_1r_3 + 2r_2r_3,$$

$$c_{13} = c_{31} = 3r_1^2 + r_2^2 + 3r_3^2 + 2r_1r_2 + 4r_1r_3 + 2r_2r_3,$$

$$c_{22} = 2r_1^2 + 12r_2^2 + 2r_3^2 + 6r_1r_2 + 2r_1r_3 + 6r_2r_3,$$

$$c_{23} = c_{32} = r_1^2 + 3r_2^2 + 3r_3^2 + 2r_1r_2 + 2r_1r_3 + 4r_2r_3,$$

$$c_{33} = 2r_1^2 + 2r_2^2 + 12r_3^2 + 2r_1r_2 + 6r_1r_3 + 6r_2r_3.$$

$[k^{(e)}]$ dagi hajm integrali quyidagi formula bilan topiladi:

$$[k^{(e)}] = \frac{2\pi r \lambda}{4A} \begin{bmatrix} b_1b_1 & b_1b_2 & b_1b_3 \\ b_2b_1 & b_2b_2 & b_2b_3 \\ b_3b_1 & b_3b_2 & b_3b_3 \end{bmatrix} + \frac{2\pi r \lambda}{4A} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Nostatsionar issiqlik tarqalish masalasini yechishda chekli elementlardan yig'ilgan to'ri uchun oddiy differensial tenglamalar tizimi yoziladi:

$$[C] \frac{\partial \{T\}}{\partial t} + [K] \{T\} + \{F\} = 0, \quad (15)$$

bu yerda:

$$[C] = \sum_e [c^{(e)}]; \quad [K] = \sum_e [k^{(e)}]; \quad [F] = \sum_e [f^{(e)}].$$

(15) differensial tenglamani yechishda, markaziy ayirma sxemasi asosida chekli ayirmalar usulini qo'llashni ko'rib chiqamiz:

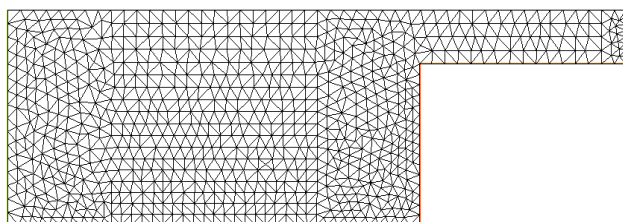
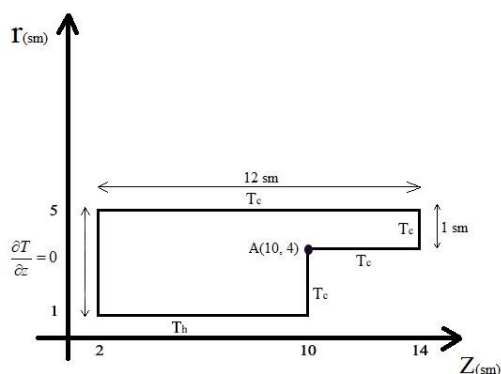
$$\left(\frac{2}{\Delta t}[C]+[K]\right)\{T\}^{n+1}=\left(\frac{2}{\Delta t}[C]-[K]\right)\{T\}^n-2\{F\}^{n+1}. \quad (16)$$

Shunday qilib, agar vaqtning t_n momentdagi harorat vektori $\{T\}^n$ ma'lum bo'lsa, unda o'qqa nisbatan simmetrik jismning $t_{n+1}=t_n+\Delta t$ vaqt lahzasidagi harorati (16) tenglamalar sistemasini yechish natijasida aniqlanadi.

Hisoblash eksperimenti va natijalarini muhokama qilish.

1-masala. Po'latdan yasalgan silindrsimon jismda nostatsionar issiqlik tarqalish masalasi ko'rib chiqildi (2-rasm). Po'lat quyidagi termofizik xususiyatlarga ega:

$$\lambda = 46 \text{ W / (m} \cdot \text{C)}, \quad \rho = 7800 \text{ kg / m}^3, \quad c = 460 \text{ J / (kg} \cdot \text{C)}.$$



2-rasm. Jism kesimi va chekli elementlar to'ri

Jismning ichki yuzasidan doimiy temperatura saqlanadi: $r=1\text{sm}$ da $T_h=100^\circ\text{C}$ va qolgan yuzalaridan issiqlik almashish koeffitsiyenti $\alpha=10\text{Wt / (m}^2\text{K)}$ va harorat $T_c=20^\circ\text{C}$ teng bo'lgan tashqi muhit bilan konvektsiya mavjud. Jismning dastlabki temperaturasi $T_0=10^\circ\text{C}$. Vaqt qadami $\Delta t=6\text{s}$.

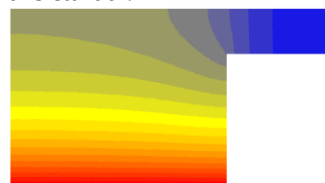
Masalani yechish uchun ishlab chiqilgan algoritmnining to'g'riligi sonli tajribalar orqali asoslandi. Chekli elementlar sonini bosqichma-bosqich oshirish orqali hisoblash natijalarining yaqinlashuvi tahlil qilindi. Olingan natijalar algoritmnining barqaror va ishonchli ekanligini

ko'rsatdi. 30 soniya vaqt momentidagi hisoblangan sonli qiymatlar 1-jadvalda keltirilgan.

1-jadval. Temperatura maydoning nazorat nuqtasidagi sonli qiymatlari

Variant	Chekli elementlar	Tugun nuqtalar	Koordinata A (10sm, 4sm)	A (%)
1	24	22	86,04	2,1
2	100	69	84,26	0,6
3	398	236	83,72	0,2
4	1584	865	83,52	

Yaqinlashuv tahlili natijalari shuni ko'rsatadiki, chekli elementlar soni 1584 ta va tugun nuqtalari soni 865 ta bo'lgan to'r uchun olingan yechim avvalgi diskretlash variantidagi yechim bilan atigi 0,2% farq qiladi. Bu esa to'rni yanada zichlashtirish natijasida yechimning sezilarli darajada o'zgarmasligini, ya'ni hisoblash jarayonining yetarli aniqlikka erishganini ko'rsatadi. Yaratilgan algoritm asosida olingan natijalarni vizual tahlil qilish maqsadida vaqt bo'yicha izotermalar taqsimoti qurildi (4-variant). Ushbu izotermalar 3-rasmga keltirilgan bo'lib, ular temperaturaning vaqtga bog'liq holda o'zgarishini yaqqol aks ettiradi.



6-sekund



30-sekund



60-sekund



3-rasm. Issiqlik tarqalish jarayonining izotermalari

Xulosa. O'qqa nisbatan simmetrik uch o'lchovli jismlarda nostatsionar issiqlik tarqalish masalasi ChEU asosida yechish algoritmi ishlab chiqilgan. Algoritmnining to'g'riligini chekli elementlar soni bosqichma-bosqich oshirish orqali hisoblash tajribalari asosida yechimlar yaqinlashuvi aniqlangan. Issiqlik maydoni vizual izotermalar orqali ko'rish uchun dasturiy modul ishlab chiqilgan va vaqt bo'yicha issiqlik tarqalish izotermalari (3-rasm) keltirilgan.

Adabiyotlar

- Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Вычислительная теплопередача. – Москва: Едиториал УРСС, 2003.
- Жуков Н. П., Майникова Н. Ф., Никулин С. С., Антонов О. А. Решение задач теплопроводности методом конечных элементов. – Тамбов: Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2014.
- Polatov A.M., Ikramov A.M., Sapayev Sh.O., Odilov J. Study of the effect of geometrical features on the temperature field of a cylindrical structure. // International Scientific Conference on Modern Problems of Applied Science and Engineering (MPASE 2024). AIP Conference Proceedings 3244, 020017 (2024); Published by AIP Publishing.