

AYRIM DINAMIK JARAYONLAR AMALIY MASALALARINI YEChISHDA
ANALITIK USULLARDAN SAMARALI FOYDALANISH

Ma'murov Talatjon Tursunpo'lotovich – o'qituvchi

mamurov_337@mail.ru

Arziqulov Husan Normurod o'g'li – o'qituvchi

arziqulovhusan12@mail.ru

Navoiy davlat universiteti

ЭФФЕКТИВНОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ПРИ РЕШЕНИИ
ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ НЕКОТОРЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Маъмуров Талатжон Турсунпулатович – преподаватель

Арзикулов Хусан Нормуродович – преподаватель

Навоийский государственный университет

EFFECTIVE USE OF ANALYTICAL METHODS IN SOLVING PRACTICAL PROBLEMS
OF CERTAIN DYNAMIC PROCESSES

Ma'murov Talatjon Tursunpo'lotovich – Lecturer

Arziqulov Husan Normurodovich – Lecturer

Navoi State University

Tayanch so'zlar: differensial tenglama, analitik yechim, kichik parametrlar usuli, Adomian qatorga yoyish usuli, homotopiya tahlil usuli, Van der Pol tenglamasi, matematik modellashirish, tebranish jarayonlari.

Rezyume. Maqolada matematik modellari ikkinchi tartibli chiziqli bo'lmagan differensial tenglamalar bilan ifodalanuvchi tizimlar holatni analiz qilishda, analitik usullardan samarali foydalanish masalasi qaralgan. Fizika, mexanika, elektrotexnika va biologiya kabi ko'plab sohalarida uchraydigan murakkab jarayonlarni matematik modellari, chiziqli bo'lmagan differensial tenglamalar bilan ifodalanib, yechimni analitik usulda olish muhim ahamiyatga ega.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, аналитическое решение, метод малых параметров, метод разложения Адомиана, метод гомотопического анализа, уравнение Ван дер Поля, математическое моделирование, колебательные процессы.

Резюме. В статье рассматривается вопрос эффективного использования аналитических методов при анализе состояния систем, математические модели которых представлены нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка. Математические модели сложных процессов, встречающихся во многих областях, таких как физика, механика, электротехника и биология, представляются нелинейными дифференциальными уравнениями, и важно получить решение аналитическим методом.

Key words: differential equation, analytical solution, small parameter method, Adomian series expansion method, homotopy analysis method, Van der Pol equation, mathematical modeling, oscillatory processes.

Summary. The article examines the effective use of analytical methods in case analysis of systems whose mathematical models are represented by second-order nonlinear differential equations. Mathematical models of complex processes encountered in many fields, such as physics, mechanics, electrical engineering, and biology, are represented by nonlinear differential equations, and it is important to obtain solutions analytically.

Kirish. Ayrim determinirli jarayonlar, jumladan fizikaning gazlar, suyuqliklar mexanikasi, issiqlik konveksiyasi, elektrotexnika, radioelektronika kabi, konsentratsiya, diffuziya, yadroviy parchalanish singari kimyoviy jarayonlar, "Yirtqich-o'lja", bir jinsli populyatsiya, inson organlari dinamik holatini o'rganish bilan bog'liq bo'lgan biologik jarayonlar matematik modellari ko'pgina hollarda chiziqli bo'lmagan oddiy yoki xususiy hosilali differensial tenglamalar bilan ifodalanadi.

Matematik fizika tenglamalari bilan ifodalanadigan yuqoridagi dinamik jarayonlarda energiya almashinuvi va jarayonlarning holat o'zgaruvi hamda harakat tezligi bilan bog'liq qonuniyatlarni o'rganish va tadqiq qilish chiziqli bo'lmagan differensial tenglamalar bilan beriladigan chegaraviy masalalarni yechishni talab qiladi. Bu singari chiziqli bo'lmagan chegaraviy masalalar yechimlarini analitik usulda topish juda murakkab yoki umuman imkonsiz bo'lishi mumkin. Shu sababli bunday tenglamalarni o'rganishda ularning analitik yechimlarini taqribiy aniqlash muhim ilmiy va amaliy ahamiyat kasb etadi. Natijada tenglamalarning yechimlari, ularning vaqt

bo'yicha o'zgarish qonuniyatlarini, jarayon holatlarining sifatli o'zgarishini aniqlash hamda turli parametrlarning tizim dinamikasiga ta'sirini baholash mumkin bo'ladi.

Chiziqli bo'lmagan differensial tenglamalarning yechimlarini taqribiy topish maqsadida turli matematik usullar ishlab chiqilgan bo'lib, ular kichik parametrlar usuli, Adomian qatorga yoyish usuli, Homotopiya tahlil usuli, variatsion usullar, iteratsion yondashuvlar va boshqa analitik yaqinlashish usullaridir. Ushbu usullar yordamida murakkab tenglamalarni soddalashtirilgan ko'rinishda tahlil qilish, ularning yechimlarini qatorlar ko'rinishida ifodalash hamda amaliy hisoblashlarda foydalanish mumkin.

Maqolada chiziqli bo'lmagan oddiy differensial tenglamalarning analitik yechimini taqribiy topish masalasi qaralib, bunda metodning qanday qo'llanilishi quyidagi ketma-ketlikda keltirildi:

- kichik parametrlar usuli – kichik parametr orqali yechimni ketma-ket yaqinlashuvchi qator sifatida ifodalash;

- Adomian qatorga yoyish usuli – noma'lum funksiyani va chiziqli bo'lmagan qismni Adomian polinomialari orqali ajratib yechim olish;

• homotopiya tahlil usuli – chiziqli va chiziqli bo‘lmagan ifodalar o‘rtasida uzluksiz bog‘lanish asosida yechim topish.

Bu usullar chiziqli bo‘lmagan differensial tenglamalarning dinamik holati va turg‘unligini tadqiq etish imkonini beradi.

Amaliy masala sifatida Van der Pol tenglamasi tadbqiqini qaraymiz. Bu tenglama radiofizika va elektrotexnika sohalarida uchraydigan chiziqli bo‘lmagan dinamik tebranish jarayonlarini tavsiflovchi muhim matematik model hisoblanadi va quyidagi differensial tenglama bilan ifodalanadi [1]:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0, \quad (1)$$

bu yerda $x = x(t)$ – signal amplitudasi, $\mu = \mu(t)$ chiziqsizlik parametri.

Boshlang‘ich shartlar:

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$$

Kichik parametrlar usulidan foydalanganda, $0 < \mu \ll 1$ bo‘lsa, yechim quyidagi qator ko‘rinishida yoziladi [2]:

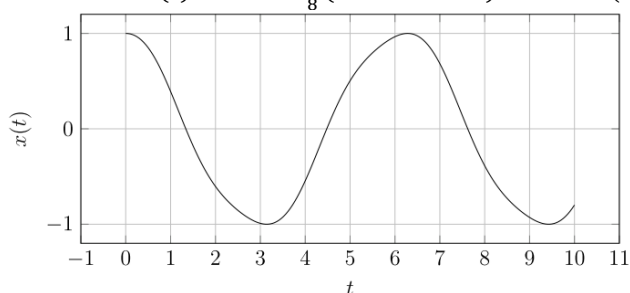
$$x(t) = x_0 + \mu x_1 + O(\mu^2) \quad (2)$$

$$x_0'' + x_0 = 0 \quad (3)$$

$$x_0 = \cos t \quad (4)$$

Natijada:

$$x(t) \approx \cos t + \frac{\mu}{8}(\sin 3t - 3\sin t) \quad (5)$$



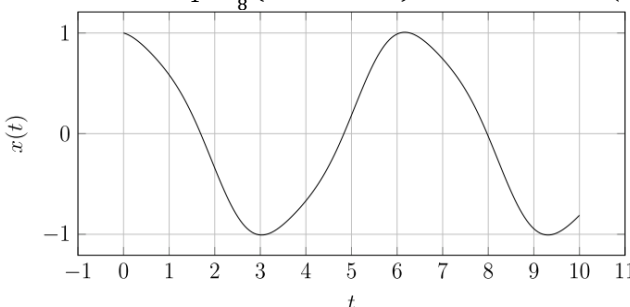
1-rasm. Kichik parametrlar usulida olingan natija.

Adomian qatorga yoyish usulidan foydalanganda yechim quyidagi funksional qator ko‘rinishida keltiriladi [3]:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) \quad (6)$$

$$x_0 = \cos t \quad (7)$$

$$x_1 = \frac{\mu}{8}(\sin t - \sin 3t). \quad (8)$$



2-rasm. Adomian qatorga yoyish usulida olingan natija.

Homotopiya tahlil usulida yechim quyidagicha olinadi

[4]:

Tenglamani quyidagi operatorlar orqali ifodalaymiz:

$$L(x) = x'' + x \quad (9)$$

$$N(x) = -\mu(1 - x^2)x' \quad (10)$$

Homotopiya quyidagicha quriladi:

$$(1 - p)[L(x) - L(x_0)] + p[L(x) + N(x)] = 0 \quad (11)$$

bu yerda $p \in [0, 1]$ — deformatsiya parametri, x_0 — boshlang‘ich yaqinlashuv bo‘lib,

$$x_0 = \cos t \quad (12)$$

ko‘rinishda olinadi.

Yechim quyidagi qator ko‘rinishida izlanadi:

$$x = x_0 + px_1 + p^2x_2 + \dots \quad (13)$$

p bo‘yicha hadlarni tenglashtirib, birinchi yaqinlashuv uchun quyidagi tenglama hosil bo‘ladi:

$$x_1'' + x_1 = \mu(1 - x_0^2)x_0' \quad (14)$$

$x_0 = \cos t$ ni hisobga olib, quyidagini topamiz

$$x_1' = -\sin t \quad (15)$$

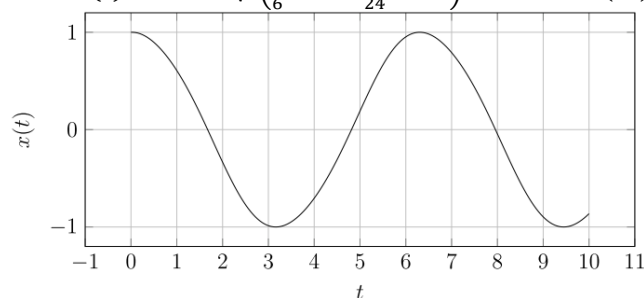
Hisoblashlar natijasida

$$x_1 = \frac{1}{6}\sin t - \frac{1}{24}\sin 3t \quad (16)$$

Natijada $p \rightarrow 1$ da umumiy yechim quyidagi

ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$x(t) = \cos t + \mu\left(\frac{1}{6}\sin t - \frac{1}{24}\sin 3t\right) \quad (17)$$



3-rasm. Homotopiya tahlil usulida olingan natija.

Xulosa. Olib borilgan hisoblash tajribasi natijasida ma‘lum bo‘ldiki, ikkinchi darajali chiziqsiz differensial tenglamalar bilan ifodalanadigan amaliy masalalarni matematik modellari, chiziqsiz chegaraviy masala ko‘rinishida bo‘lib, analitik usullar yordamida olingan yechim yuqori aniqlikda tahlil qilish imkoniyatini yaratdi. Holati Van der Pol tenglamasi bilan ifodalanadigan amaliy masala sifatida, tebranishlarning amplituda–faza holatlarini o‘rganish masalasi qaraldi va hisoblash tajribasi o‘tkazilib, olingan yechimlar tahlil qilindi. Turli usullar qo‘llanilib, olingan yechimlar grafiklar usulida keltirilib, ularning o‘zaro yaqinligi grafiklarda o‘z aksini topdi. Olingan natijalar tabiatda uchraydigan biologik, sanoatda uchraydigan fizik, mexanik jarayonlarni aks ettiruvchi tizimlarni matematik modellash yordamida tahlil qilishda, maqolada qo‘llanilgan analitik usullardan foydalanish, sifatli va samarali vosita ekanligidan dalolat beradi.

Adabiyotlar

1. Andronov A.A., Vitt A.A., Khaikin S.E., Theory of Oscillators, Monograph. – Oxford: «Pergamon Press», 1966.
2. Nayfeh A.H., Introduction to Perturbation Techniques, Monograph. – New York: «Wiley-Interscience», 1981.
3. Adomian G., Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method, Monograph. Kluwer Academic Publishers, 1994.
4. Liao S., Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method, Monograph. Chapman and Hall/CRC, 2003.
5. Орлов В.Н., Чичурин А.В. Построение аналитических приближенных решений нелинейных дифференциальных уравнений второго-четвертого порядков. Математическое моделирование и дифференциальные уравнения. – Минск: Электронная библиотека БГУ, 2024.