

DIOFANT TENGLAMALARI VA ULARNING TADBIQLARI

Islamov Xurram – katta o'qituvchi

xurramislamov@gmail.com

Mamatmurotov Rufatbek Sherzod o'g'li – o'qituvchi

rufatbekmamatmurotov@gmail.com

Raimqulov Sherali Urazdavlatovich – o'qituvchi

raimqulovsherali@gmail.com

Termiz davlat pedagogika instituti

ДИОФАНТОВЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Исламов Хуррам – старший преподаватель

Маматмуротов Руфатбек Шерзодович – преподаватель

Раимкулов Шерали Ураздавлатович – преподаватель

Термезский государственный педагогический институт

DIOPHANTINE EQUATIONS AND THEIR APPLICATION

Khurram Islamov – senior Lecturer

Mamatmurotov Rufatbek Sherzodovich – teacher

Raimkulov Sherali Urazdavlatovich – teacher

Termiz State Pedagogical Institute

Tayanch so'zlar: diofant tenglamasi, butun sonlar, chiziqli tenglama, tenglama yechimi, kriptografiya, robototexnika.

Rezyume. Maqolada chiziqli Diofant tenglamalari va unig yechimga ega bo'lish shartlari hamda ularning amalda qo'llanishiga doir masala ko'rib chiqilgan. Diofant tenglamalarining bugungi kunda fan va texnikada qo'llanilish sohalari yoritib berilgan.

Ключевые слова: диофантовые уравнения, целые числа, линейное уравнение, решение уравнения, криптография, робототехника.

Резюме. В статье рассматриваются проблемы линейных диофантовских уравнений и условия существования единственного решения, а также их практическое применение. Освещаются области применения диофантовских уравнений в современной науке и технике.

Key words: diophantine equations, integers, linear equation, equation solution, cryptography, robotics.

Summary. This article discusses the problems of linear Diophantine equations and the conditions for the existence of a unique solution, as well as their practical applications. The article highlights the areas of application of Diophantine equations in modern science and technology.

Kirish. Diofant tenglamasi deb $P(a_1, a_2, \dots, a_n x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$ (1) ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi. Bunda P – butun qiymatli funksiya, masalan:

P – ko'phad. $a_1, a_2, \dots, a_n$ – parametrlar, $x_1, x_2, \dots, x_m$ – noma'lumlar.

Agar (1) tenglamada $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ – parametrlar uchun shunday $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ – butun sonlar topilsaki bunda (1) tenglama to'g'ri tenglikka aylansa $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ butun sonlarga (1) tenglamaning yechimi deyiladi.

Soddalik uchun chiziqli diofant tenglamasini ko'rib chiqamiz.

Quyidagi $ax + by = c$ (2)

ko'rinishdagi tenglama chiziqli diofant tenglamasi deyiladi, bunda $(a \neq 0, b \neq 0)$ $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Agar a va b butun sonlarning EKUB ini (a, b) bilan belgilasak quyidagi teorema o'rinli

Teorema: (2) tenglama x va y larning butun qiymatlarida yechimga ega bo'lishi uchun $(a, b) | c$ shartning bajarilishi zarur va yetarli.

Agar (2) tenglama yechimga ega bo'lsa bu yechimlar cheksiz ko'p bo'ladi, ular quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{(a,b)}t \\ y = y_0 - \frac{a}{(a,b)}t \end{cases} \quad (3) \text{ bunda } (x_0, y_0) \text{ (2) tenglamaning}$$

biror yechimi, t – ixtiyoriy butun son. (2) tenglama yechimini topishning uch xil usuli mavjud.

1) Tanlash usuli. 2) Evklid algoritmi. 3) Zanjirli kasrlar.

Quyidagi chiziqli diofant tenglamasining butun sonlardagi yechimini tanlash usulidan foydalanib topamiz.

1-misol. Diofant tenglamasini yeching.

$$13x - 7y = 6;$$

Yechimi: $(13, 7) = 1$ va $6 | 1$ bo'lgani uchun tenglama yechimga ega bo'ladi. $7 < 13$ bo'lgani uchun tenglamaning har ikkala tamoni 7 ga bo'lib y ni topamiz $7y = 13x - 6$

$$y = \frac{13x-6}{7} = \frac{13x+x-x-6}{7} = 2x - \frac{x+6}{7}$$

$y \in \mathbb{Z}, 2x \in \mathbb{Z}$. Agar $x = 1$ desak kasr butun songa aylanadi, ya'ni

$$y = 2 \cdot 1 - 1 = 1. \text{ Demak } (x_0, y_0) = (1, 1) \text{ tenglamaning bitta yechimi bo'ladi. Boshqa yechimlarni quyidagicha topamiz.}$$

$\begin{cases} 13x - 7y = 6 \\ 13 \cdot 1 - 7 \cdot 1 = 6 \end{cases}$ bundagi 1-tenglamadan 2- tenglikni ayirsak, natijada quyidagini hosil qilamiz: $13(x-1) - 7(y-1) = 0$

$$13(x-1) = 7(y-1) \quad (4)$$

Agar $(x-1) : 7$ bo'lsa, u holda $x-1 = 7n$, $n \in \mathbb{Z}$ deb olamiz, bundan

$$x = 7n + 1 \text{ bo'ladi. Buni (4) ga qo'ysak } 13 \cdot 7n = 7(y-1),$$

$$7y - 7 = 13 \cdot 7n, y = 13n + 1.$$

Demak, berilgan tenglamaning yechimi $(7n + 1, 13n + 1)$, bunda $n \in \mathbb{Z}$

2-misol. $6x - 9y = 29$, tenglamaning butun sonlardagi yechimini toping.

Yechimi: $(6, 9) = 3$, lekin 29 soni 3 soniga bo'linmaydi. Demak tenglama butun sonlarda yechimga ega emas, ya'ni yechim $\emptyset$.

O'rta asrlarda Diofant tenglamalari bilan Al-Xorazmiy (780-846) va Al'-Koshi (1380-1429)lar ham shug'ullanganlar. Birinchi darajali ikki o'zgaruvchili

$ax + by = c$ va uch o'zgaruvchili $ax + by + cz = d$, bunda

x, y, z -noma'lumlar Diofant tenglamalari astronomik masalalarni yechishda osmon jismlarining davriy takrorlanishlarini o'rganishda hamda arxitektura va geometrik masalalarda qo'llaniladi [1].

Uch noma'lumli Diofant tenglamasini qaraymiz: $x + y + z = 6$

Bu — uch noma'lumli Diofant tenglama (ya'ni x, y, z butun sonlar bo'lishi kerak).

Bu tenglama uchun umumiy yechim topamiz. Ikki o'zgaruvchini erkin deb olamiz.

Masalan: $x = a, y = b$ desak u holda $z = 6 - a - b$ bo'ladi.

bu yerda $a, b \in \mathbb{Z}$ (ixtiyoriy butun sonlar). Demak umumiy yechim

$x = a, y = b, z = 6 - a - b$ bo'ladi. Ayrim xususiy yechimlar quyidagicha bo'ladi:

$$a = 1, b = 2 \rightarrow x = 1, y = 2, z = 3$$

$$a = 0, b = 0 \rightarrow x = 0, y = 0, z = 6$$

$$a = 5, b = -1 \rightarrow x = 5, y = -1, z = 2$$

Demak uch noma'lumli chiziqli Diofant tenglama odatda cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi va yechimlar erkin parametrlar orqali ifodalanadi

Diofant tenglamani yechamiz.
 $2x + 3y + 5z = 17$, Bu yerda $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

$$z \text{ ni ajratamiz: } 5z = 17 - 2x - 3y \Rightarrow z = \frac{17-2x-3y}{5}$$

z butun bo'lishi uchun surat 5 ga bo'linishi kerak:

$$17 - 2x - 3y \equiv 0 \pmod{5}$$

Buni taqqoslama yordamida yozamiz: $17 \equiv 2 \pmod{5}$
 $2 - 2x - 3y \equiv 0 \pmod{5}, 2x + 3y \equiv 2 \pmod{5}$

z ni topamiz $z = \frac{17-2x-3y}{5}$ x va y lar o'rniga

$x = 1 + t + 5k, y = t$ ni qo'yamiz. Natijada

$$z = \frac{17-2(1+t+5k)-3t}{5} = \frac{17-2-2t-10k-3t}{5} = \frac{15-5t-10k}{5}$$

$z = 3 - t - 2k, x = 1 + t + 5k, y = t, z = 3 - t - 2k$, bu yerda $t, k \in \mathbb{Z}$.

Evropada italiyan matematiklari P.Ferma (1601-1665) va B.Kavaleri (1598-1647) lar tamonidan diofant tenglamalari o'rganildi. Ferma Diofant tenglamalarini yechishga

juda katta hissa qo'shdi va ularni yechishda butun sonlarning bo'linish nazariyasini qo'lladi. Fermaning katta va kichik teoremlarini L. Eyler (1707-1855) tomonidan umumlashtirildi.

XIX asrda F.Gauss (1777-1855) Diofant tenglamalarini arifmetik modullardan foydalanib yechish usullarini rivojlantirdi. XX asrda kompyuter texnologiyasining vijudga kelishi munosabati bilan Diofant tenglamalarini yechishning algoritmi yaratildi. Bu algoritmlar yordamida ancha murakkab Diofant tenglamalari yechila boshlandi, bu esa diofant tenglamalarining kriptografiya va sonlar nazariyasida qo'llanishiga olib keldi [2].

Hozirgi kunda diofant tenglamalari turli sohalaridagi amaliy masalalarni yechishda qo'llanilmoqda.

1) Kriptografiya: Kriptografik ma'lumotlarning xavfsizligini ta'minlash orqali ta'minlash orqali uzatish m: RSA-algoritmi shifirlashga asoslangan bo'lib unda murakkab diofant tenglamalarini yechishga asoslanadi. Internet banking va xavfsiz xabarlar almashishda ishlatiladigan ushbu tizim katta sonlarni ko'paytuvchilarga ajratish va chiziqli Diofant tenglamalarini yechishga asoslangan

2) Kompyuter grafikasi. Kompyuter grafikasida Bez'e egri chiziqlari va Bez'e sirtlarini yaratish qo'llaniladi. Bu egri chiziq va sirtlar, murakkab geometrik figura va obyektlarni uch o'lchovli fazoda yaratish imkonini beradi.

3) Iqtisodiyot: Kundalik hayotdagi resurslarni taqsimlash masalalarida Diofant tenglamalari hal qiluvchi rol o'ynaydi. Optimal xarid: Masalan, ma'lum bir budjetga faqat butun miqdordagi mahsulotlarni (masalan, faqat butun sonli texnikalar yoki transport vositalari) sotib olish kombi-natsiyalarini hisoblashda qo'llaniladi. Ishlab chiqarish: Xomashyoni qoldiqsiz ishlatish va mahsulot birliklarini taqsimlashda chiziqli tenglamalar sistemasi yordam beradi. Iqtisodiyotda talab va takliflar yordamida hosil qilingan modullarning yechimini topishda diofant tenglamalaridan foydalaniladi

4) Ximiya: Reaksiyalarni tenglashtirish: Kimyoviy reaksiya tenglamalaridagi koeffitsientlar faqat butun sonlar bo'lishi shart. Bu koeffitsientlarni topish jarayoni mohiyatan chiziqli Diofant tenglamalari sistemasini yechishdir.

5) Robototexnika: Diofant tenglamalari robototexnikada robotlarning harakat qilishini programmashtirish, fazoda harakatlanishi uchun detallarni yig'ish va teng bo'lmagan sirtlarda joylashishini o'rganishda qo'llaniladi

6) Astronomiya: Sayyoralarning harakat davriyligini hisoblashda, ya'ni ma'lum vaqtdan keyin sayyoralar qachon yana bir chiziqqa tizilishini aniqlashda Diofant tenglamalari va zanjir kasrlardan foydalaniladi.

Bugungi kunda Diofant tenglamalarini o'rganish matematikaning turli sohalarida, malekulyar fizika va organik ximiyada, ehtimollar nazariyasida keng qo'llanilmoqda [3].

Xulosa. Diofant tenglamalari shunchaki maktab algebrasi emas, balki kiberxavfsizlikdan tortib kosmik tadqiqotlarga bo'lgan sohalarining matematikasidir. Ularni o'rganish o'quvchilarda algoritmlash va mantiqiy modellashtirish qobiliyatini rivojlantiradi.

Adabiyotlar

1. Далингер В.А. Задачи в целых числах. – ОМ ГПУ, 2020.
2. Allakov I. Sonlar nazariyasidan misol va masalalar. – Toshkent: «Surxon-Nashr», 2020.
3. Ayupov Sh.A. va boshqalar. Abstrakt algebra. – Toshkent: UzMU, 2021.