

MATEMATIK INDUKSIYA: ALGORITMIK YONDASHUV VA MATLAB TADBIQLARI

Bekmetova Sadoqat Atabayevna – katta o‘qituvchi

bekmetova.s@urdu.uz

Yuldashev Begzod Egamberganov o‘g‘li – o‘qituvchi

b.yuldashev@alumni.nsu.ru

To‘raxonov Islombek Farhodovich – o‘qituvchi

islombek@urdu.uz

Abu Rayhon Beruniy nomidagi Urganch davlat universiteti

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИНДУКЦИЯ: АЛГОРИТМИЧЕСКИЙ ПОДХОД И ПРИЛОЖЕНИЯ В MATLAB

Бекметова Садокат Атабаевна – старший преподаватель

Юлдашев Бегзод Эгамберганович – преподаватель

Турахонов Ислонбек Фарходович – преподаватель

Ургенчский государственный университет имени Абу Райхона Беруни

MATHEMATICAL INDUCTION: AN ALGORITHMIC APPROACH AND MATLAB APPLICATIONS

Bekmetova Sadoqat Atabayevna – senior lecturer

Yuldashev Begzod Egamberganovich – lecturer

Turakhonov Islombek Farkhodovich – lecturer

Urgench State University named after Abu Rayhon Beruniy

Tayanch so‘zlar: matematik induksiya, algoritmik yondashuv, MATLAB, rekursiya, vizuallashtirish, matematik modellash, qonuniyatlarni aniqlash.

Rezyume. Maqolada matematik induksiya nafaqat isbotlash usuli sifatida, balki algoritmik fikrlash vositasi sifatida ham o‘rganiladi. MATLAB dasturi yordamida matematik formulalarni tekshirish, vizuallashtirish va yangi qonuniyatlarni aniqlash imkoniyatlari ko‘rsatib beriladi. Induksiya va rekursiya o‘rtasidagi uzviy bog‘lanish misollar orqali yoritiladi.

Ключевые слова: математическая индукция, алгоритмический подход, MATLAB, рекурсия, визуализация, математическое моделирование, выявление закономерностей.

Резюме. В статье математическая индукция рассматривается не только как метод доказательства, но и как инструмент алгоритмического мышления. Демонстрируются возможности среды MATLAB для проверки математических формул, визуализации данных и выявления новых закономерностей. На конкретных примерах раскрывается тесная взаимосвязь между индукцией и рекурсией.

Key words: mathematical induction, algorithmic approach, MATLAB, recursion, visualization, mathematical modeling, pattern recognition.

Summary. The paper examines mathematical induction not only as a method of proof but also as a tool for algorithmic thinking. It demonstrates the capabilities of MATLAB for verifying mathematical formulas, visualizing data, and identifying new patterns. The inherent connection between induction and recursion is elucidated through practical examples.

Kirish. Matematik induksiya diskret matematikaning fundamental va eng ko‘p qo‘llaniladigan usullaridan biri bo‘lib, natural sonlarga bog‘liq mulohazalar, algebraik tengliklar va ketma-ketliklarni isbotlashda muhim o‘rin tutadi. An‘anaviy yondashuvda bu usul asosan nazariy xarakterga ega bo‘lib, baza (boshlang‘ich qadam) va induksion qadamni qog‘ozda tahlil qilish bilan cheklangan. Biroq raqamli texnologiyalar va algoritmlash jadal rivojlanayotgan hozirgi kunda matematik induksiyaning tatbiq doirasi sezilarli darajada kengayib bormoqda.

Induksiya endilikda faqat nazariy isbotlash vositasi emas. U rekursiv strukturalarni tushunish, algoritmlar tuzish va ularning to‘g‘riligini dasturiy jihatdan asoslashda ham asosiy tayanch bo‘lib xizmat qilmoqda. Zamonaviy hisoblash tizimlari, xususan MATLAB dasturi, induktiv g‘oyalarni amaliy jihatdan tekshirish, murakkab ifodalarni soddalashtirish hamda induksion qadamdagi mantiqiy bog‘liqliklarni simulyatsiya qilish uchun keng imkoniyatlar yaratadi.

Ushbu maqolaning asosiy maqsadi matematik induksiya yordamida yechiladigan masalalarni MATLAB dasturi orqali tahlil qilish, raqamli (numeric) va simvolik (symbolic) hisoblashlar yordamida gipotezalarni sinovdan o‘tkazish usullarini o‘rganishdan iborat. Bu yondashuv tadqiqotchilarga nafaqat isbotlarning to‘g‘riligiga ishonch

hosil qilishga, balki mantiqiy va algoritmik fikrlashni uyg‘unlashtirishga yordam beradi.

Matematik induksiya va zamonaviy dasturlash vositalarini integratsiya qilish talabalar va yosh tadqiqotchilarning algoritmik fikrlashini rivojlantiradi. Shuningdek, murakkab rekursiv va induktiv masalalarni yechishda yuzaga kelishi mumkin bo‘lgan hisoblash xatolarini oldindan aniqlash va algoritmlar samaradorligini oshirish imkonini beradi.

Induksiya va rekursiya. Induksiya va rekursiya o‘rtasida kuchli bog‘lanish mavjud. Har qanday rekursiv aniqlanish induktiv isbotga olib keladi.

Fibonachchi ketma-ketligi quyidagi rekursiv formula orqali aniqlanadi:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

Mazkur ta‘rif rekursiv xarakterga ega bo‘lib, har bir had oldingi ikkita had orqali aniqlanadi. Shu sababli Fibonachchi sonlari matematik induksiya bilan bevosita emas, balki bilvosita bog‘langan.

Quyidagi tengsizlikni ko‘rib chiqamiz:

$$F_n \leq 2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Uni isbotlash uchun matematik induksiya usulidan foydalanamiz:

Boshlang‘ich holat: $n = 1$ va $n = 2$ uchun:

$$F_1 = 1 \leq 2, \quad F_2 = 1 \leq 4.$$

Induktiv faraz: Faraz qilaylik, $n = k$ va $n = k - 1$ uchun:

$$F_k \leq 2^k, \quad F_{k-1} \leq 2^{k-1}.$$

Induktiv qadam: Unda $n = k + 1$ uchun:

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1}.$$

Induktiv farazdan foydalanib:

$$F_{k+1} \leq 2^k + 2^{k-1} = 2^{k-1}(2+1) = 3 \cdot 2^{k-1}.$$

Endi quyidagini ko'ramiz:

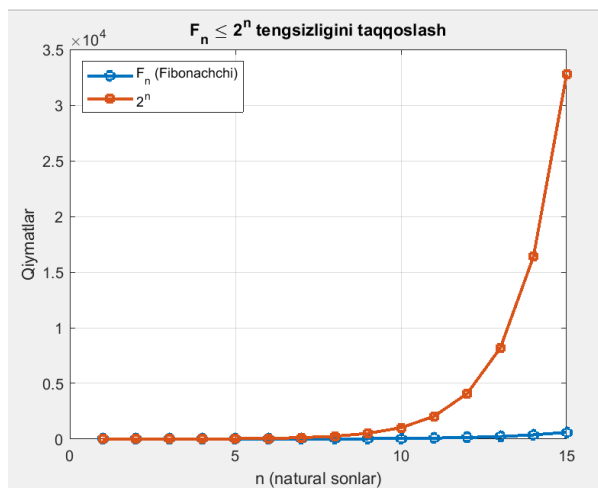
$$3 \cdot 2^{k-1} < 2^{k+1},$$

chunki $3 < 4$. Demak,

$$F_{k+1} < 2^{k+1}.$$

Shunday qilib, tengsizlik barcha n lar uchun o'rinli. Endi bu yerda qaralayotgan tengsizlikning to'g'riligini MATLAB dasturi yordamida tekshirish jarayonini ham ko'rib chiqamiz:

```
n = 1:15;
Fn = 20eometric(n);
power2n = 2.^n;
figure;
plot(n, Fn, '-o', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 6,
'DisplayName', 'F_n (Fibonachchi)');
hold on;
plot(n, power2n, '-s', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 6,
'DisplayName', '2^n');
hold off;
grid on;
title('F_n \leq 2^n tengsizligini taqqoslash');
xlabel('n (natural sonlar)');
ylabel('Qiymatlar');
legend('Location', 'northwest');
```



1-rasm

Grafikga qarab quyidagi 3 ta muhim xulosani ko'rish mumkin:

1. Boshlang'ich qiymatlar ($n = 1, 2$):

n ning kichik qiymatlarida, masalan, $n = 1$ bo'lganda, $F_1 = 1$ va $2^1 = 2$ qiymatlar bir-biriga nisbatan yaqin joylashadi.

2. O'sish tezligidagi keskin farq:

n qiymati ortishi bilan (ayniqsa $n > 5$ dan boshlab), 2^n funksiyasining o'sish tezligi Fibonachchi ketma-

ketligiga qaraganda ancha yuqori bo'ladi. Masalan, oxirgi nuqtada $F_{15} = 610$ ni tashkil etsa, $2^{15} = 32768$ ga yetadi.

3. Tengsizlikning to'g'riligi:

Grafikda 2^n ni ifodalovchi chiziq har doim F_n ni ifodalovchi chiziqdan yuqorida yotibdi. Bu geometrik jihatdan quyidagi tengsizlikning isboti hisoblanadi: $F_n \leq 2^n$

ya'ni, bu chiziqlar hech qachon kesishmaydi va 2^n funksiyasi F_n dan doimo katta bo'ladi.

Endi esa Fibonachchi sonlari uchun quyidagi xossani tahlil qilamiz:

1-teorema. Yig'indi formulasi: Endi quyidagi formulani ko'rib chiqamiz:

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1.$$

Isbot: Boshlang'ich holat: $n = 1$ uchun:

$$F_1 = 1 = F_3 - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Induktiv faraz: Faraz qilaylik,

$$F_1 + F_2 + \dots + F_k = F_{k+2} - 1.$$

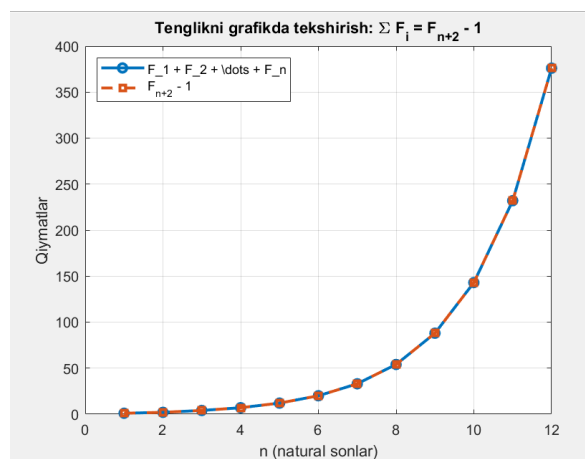
Induktiv qadam:

$$\begin{aligned} F_1 + \dots + F_k + F_{k+1} &= (F_{k+2} - 1) + F_{k+1} \\ &= F_{k+2} + F_{k+1} - 1 = F_{k+3} - 1. \end{aligned}$$

Demak, formula barcha n lar uchun to'g'ri.

Endi bu misolda berilgan tenglikning to'g'riligini MATLAB yordamida tekshiramiz:

```
n = 1:12;
chap_qism = arrayfun(@(k) sum(20eometric(1:k)), n);
ong_qism = 20eometric(n + 2) - 1;
figure;
plot(n, chap_qism, '-o', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize',
6, 'DisplayName', 'F_1 + F_2 + \dots + F_n');
hold on;
plot(n, ong_qism, '—s', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize',
6, 'DisplayName', 'F_{n+2} - 1');
hold off;
grid on;
title('Tenglikni grafikda tekshirish: \Sigma F_i = F_{n+2} - 1');
xlabel('n (natural sonlar)');
ylabel('Qiymatlar');
legend('Location', 'northwest');
```



2-rasm

Rasmdan ko‘rinib turibdiki natijalar teng chiqadi, bu esa formulani eksperimental ravishda tasdiqlaydi.

Fibonachchi sonlari rekursiv tarzda aniqlanadi, ammo ularning xossalari isbotlashda matematik induksiya muhim rol o‘ynaydi. Shu tariqa, rekursiya va induksiya o‘zaro bog‘liq bo‘lib, biri obyektini qurish, ikkinchisi esa uning xossalari asoslash uchun xizmat qiladi. MATLAB esa ushbu nazariy natijalarni amaliy jihatdan tekshirish imkonini beradi.

Induktiv isbot va hisoblash orqali tekshirish

2-teorema. Har qanday $n \in \mathbb{N}$ uchun:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Isbot: $n=1$ uchun tenglik o‘rinli. Faraz qilaylik, $n=k$ uchun o‘rinli:

$$1^3 + \dots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2.$$

Endi $n=k+1$ uchun:

$$1^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2 + (k+1)^3 = (k+1)^2 \left(\frac{k^2}{4} + k + 1 \right) = (k+1)^2 \cdot \frac{(k+2)^2}{4} = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right)^2,$$

demak, tasdiq isbotlandi.

MATLAB orqali tekshirish:

```
n = 1:15;
chap_qism = arrayfun(@(k) sum((1:k).^3), n);
ong_qism = ((n.* (n + 1)) ./ 2).^2;
figure;
plot(n, chap_qism, '-o', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize',
6, 'DisplayName', '1^3 + 2^3 + \dots + n^3');
hold on;
plot(n, ong_qism, '-s', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize',
6, 'DisplayName', '((n(n+1))/2)^2');
hold off;
grid on;
title('Tenglikni grafikda tekshirish: \Sigma i^3 = ((n(n+1))/2)^2');
xlabel('n (natural sonlar)');
ylabel('Qiymatlar');
legend('Location', 'northwest');
```

Tengsizliklar va induksiya

3-teorema. Agar $x > -1$ bo‘lsa, u holda:

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Isbot: Matematik induksiya usuli ikki qismdan iborat: Baza qadami ($n=1$ uchun): $n=1$ bo‘lganda tengsizlikning chap va o‘ng qismlarini tekshiramiz:

$$(1+x)^1 \geq 1+1 \cdot x$$

bu ifoda quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$1+x \geq 1+x,$$

tengsizlik o‘rinli (chap va o‘ng qismlar o‘zaro teng).

Induksion faraz: Faraz qilamizki, bu tengsizlik $n=k$ ($k \in \mathbb{N}$) uchun o‘rinli:

$$(1+x)^k \geq 1+kx. \quad (1)$$

Induksion qadam ($n=k+1$ uchun): Tengsizlik $n=k+1$ uchun ham o‘rinli ekanligini, ya’ni quyidagi tengsizlikni isbotlashimiz kerak:

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x.$$

Buning uchun (1) ifodaning ikkala tomonini $1+x$ ga ko‘paytiramiz (shartga ko‘ra $x > -1$, shuning uchun $1+x > 0$ va tengsizlik o‘zgarmaydi):

$$(1+x)^k \cdot (1+x) \geq (1+kx)(1+x)$$

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+x+kx+kx^2.$$

O‘ng qismdagi ifodani guruhlaymiz:

$$1+x+kx+kx^2 = 1+(k+1)x+kx^2.$$

Endi kx^2 hadga e’tibor qaratamiz: $k \in \mathbb{N}$ va har qanday haqiqiy sonning kvadrati musbat yoki nolga teng bo‘lgani uchun $kx^2 \geq 0$. Shuning uchun:

$$1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x.$$

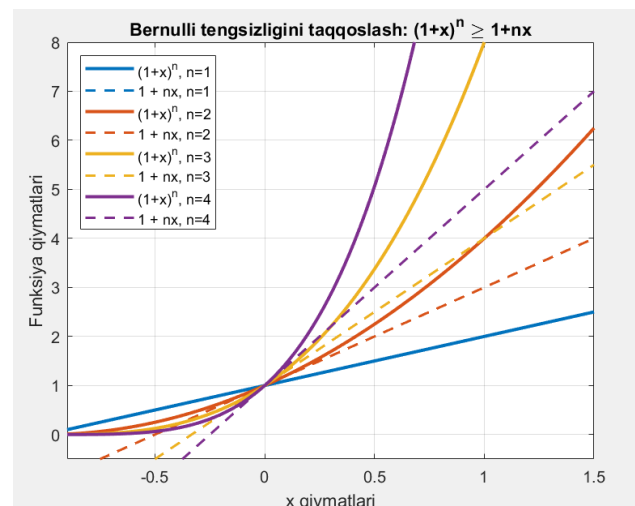
Natijada quyidagi tengsizlikka ega bo‘lamiz:

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x.$$

Matematik induksiya prinsipiga asosan, Bernulli tengsizligi barcha $n \in \mathbb{N}$ uchun o‘rinli ekanligi isbotlandi.

MATLAB orqali grafik tekshirish:

```
x = linspace(-0.9, 1.5, 100);
n_values = [1, 2, 3, 4];
figure;
colors = lines(length(n_values)); % Har bir n uchun alohida rang tanlash
for i = 1:length(n_values)
    n = n_values(i);
    LHS = (1+x).^n;
    RHS = 1 + n * x;
    plot(x, LHS, 'Color', colors(i,:), 'LineWidth', 2, ...
'DisplayName', ['(1+x)^n, n=' num2str(n)]);
hold on;
plot(x, RHS, '--', 'Color', colors(i,:), 'LineWidth', 1.5, ...
'DisplayName', ['1 + nx, n=' num2str(n)]);
end
grid on;
title('Bernulli tengsizligini taqqoslash: (1+x)^n \geq 1+nx');
xlabel('x qiymatlari');
ylabel('Funksiya qiymatlari');
legend('Location', 'northwest');
xlim([-0.9 1.5]);
ylim([-0.5 8]);
```



3-rasm

1. **Kesishish nuqtasi ($x = 0$):**

Ikkala chiziq $x = 0$ nuqtada kesishadi. Bu nuqtada ikkala tomon ham 1 ga teng bo'ladi: $(1+0)^n = 1$ va $1+n \cdot 0 = 1$.

2. **$x > 0$ bo'lgan holat (Musbat zonada):**

x musbat bo'lganida, egri chiziq $(1+x)^n$ to'g'ri chiziq $1+nx$ dan yuqorida yotadi. Bu shuni bildiradiki, daraja ortgan sari chap qism o'ng qismdan keskinroq o'sib ketadi ($F(x) > G(x)$).

3. **$-1 < x < 0$ bo'lgan holat (Manfiy zonada):**

x manfiy bo'lganida ham, egri chiziq to'g'ri chiziqdan yuqorida joylashgan. Bu Bernulli tengsizligi $x > -1$ bo'lgan har qanday shartda to'g'riligini isbotlaydi. Qaysi rangdagi (ya'ni qaysi n) chiziq'larga qaramang, chap qismning qiymati o'ng qismdan har doim katta yoki unga teng bo'ladi. Bu tengsizlikning geometrik talqini.

Xulosa. Matematik induksiya faqat isbotlash vositasi emas, balki algoritmik fikrlash va hisoblash tajribalari bilan uzviy bog'langan kuchli metoddir. MATLAB bilan birgalikda qo'llanganda u zamonaviy matematik tadqiqotlar uchun samarali vositaga aylanadi.

Adabiyotlar

1. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. 11-е изд. 1995.
2. Abdurahmonov B. Matematik induksiya metodi. – Toshkent: 2008.
3. Николаева С.А. Метод математической индукции. Методическое пособие для учителей и учащихся инженерных классов физико-математического профиля. – Ядрин: 2015.
4. Дьяконов В.П. MATLAB. Полный самоучитель. – Москва: ДМК Пресс, 2012.