

TÁBIYIY HÁM TEXNIKALÍQ ILIMLER

Fizika-matematika. Texnika. Informatika

СВОЙСТВА ОЦЕНОК УСЛОВНЫХ ФУНКЦИЙ ВЫЖИВАНИЯ ПРИ СЛУЧАЙНОМ ЦЕНЗУРИРОВАНИИ НАБЛЮДЕНИЙ С ДВУХ СТОРОН

Абдикаликов Фархад Абдизалиевич – доктор философии по физико-математическим наукам
farxadabdikalikov2907@gmail.com

Каракалпакский государственный университет имени Бердаха
Институт математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан

Таджиев Тимур Муратович – доктор философии по экономическим наукам
tadjievtimur9@gmail.com

Нукусский государственный педагогический институт имени Ажинияза
Эрисбаев Сабитбек Абдуллаевич – доктор философии по физико-математическим наукам
sabitbekn@mail.ru

Каракалпакский государственный университет имени Бердаха

ИККИ ТОМОНЛАМА ТАСОДИФИЙ ЦЕНЗУРАЛАНГАН КУЗАТИШЛАРДА ШАРТЛИ УМР ДАВОМИЙЛИГИ ФУНКЦИЯЛАРИ БАҲОЛАРИНИНГ ХОССАЛАРИ

Абдикаликов Фархад Абдизалиевич – физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори
Бердақ номидаги Қорақалпоқ давлат университети

Ўзбекистон Республикаси Фанлар академияси В.И.Романовский номидаги Математика институти

Таджиев Тимур Муратович – иқтисодиёт фанлари бўйича фалсафа доктори
Ажиниёз номидаги Нукус давлат педагогика институти

Эрисбаев Сабитбек Абдуллаевич – физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори
Бердақ номидаги Қорақалпоқ давлат университети

PROPERTIES OF ESTIMATORS FOR CONDITIONAL SURVIVAL FUNCTIONS UNDER RANDOM CENSORING OF OBSERVATIONS FROM BOTH SIDES

Abdikalikov Farkhad Abdizhalievich – Doctor of Philosophy in Physical and Mathematical Sciences
Karakalpak State University named after Berdakh

V.I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan

Tadzhiev Timur Muratovich – Doctor of Philosophy in Economic Sciences
Nukus State Pedagogical Institute named after Ajiniyaz

Erisbaev Sabitbek Abdullaevich – Doctor of Philosophy in Physical and Mathematical Sciences
Karakalpak State University named after Berdakh

Таянч сўзлар: непараметрик регрессия, тасодифий цензурланиш, умр давомийлиги функцияси, даражали баҳо, ядровий баҳо.

Резюме. Маколада икки томондан тасодифий цензурланишнинг регрессия моделида шартли умр давомийлиги функциясининг даражали баҳоси тузиган. Ушбу баҳонинг боғлиқсиз тасодифий функциялар йиғиндиси билан аппроксимацияси ва унинг текис кучли асослилиги хоссалари ўрганилган.

Ключевые слова: непараметрическая регрессия, случайное цензурирование, функция выживания, степенная оценка, ядерная оценка.

Резюме. В статье построена степенная оценка условной функции выживания в регрессионной модели при случайном цензурировании с двух сторон. Изучена аппроксимация данной оценки суммой независимых случайных функций и свойства её равномерной сильной состоятельности.

Key words: nonparametrical regression, random censoring, survival function, power-type estimator, kernel estimator.

Summary. The article constructs a power type estimator for the conditional survival function in a regression model under random censoring from both sides. The approximation of this estimator by a sum of independent random functions and its uniform strong consistency properties are studied.

I. Непараметрическая регрессионная модель при случайном цензурировании с двух сторон. Рассмотрим следующую регрессионную модель с фиксированным дизайном для случая цензурирования наблюдений с двух сторон. Пусть случайная величина (с.в.) Z , означающая продолжительность жизни пациента, находится под влиянием другой с.в. X , означающей дозу лекарства. В индустриальных опытах Z означает время безотказной работы технического устройства, а X - давление, температуру или напряжение. На практике,

как правило с.в. Z полностью ненаблюдаема и может подвергаться случайному цензурированию с двух сторон с.в. L и Y . Предполагается, что компоненты вектора (L, Z, Y) независимы с.в. при заданной ковариате $X = x$. Пусть $\{(L_k, Z_k, Y_k), k = \overline{1, n}\}$ - независимые реализации с.в. (L, Z, Y) в n экспериментах и схема цензурирования такова, что в n -м шаге эксперимента наблюдается $S^{(n)} = \{(\xi_i, \delta_i^{(0)}, \delta_i^{(1)}, \delta_i^{(2)}), i = \overline{1, n}\}$, где

$\xi_i = \max(L_i, \min(Z_i, Y_i))$, $\delta_i^{(0)} = I(L_i > \min(Z_i, Y_i))$,
 $\delta_i^{(1)} = I(L_i \leq Z_i \leq Y_i)$, $\delta_i^{(2)} = I(L_i \leq Y_i < Z_i)$ и $I(A)$ –
индикатор события A . Заметим, что интересующие нас
с.в. Z_i наблюдаемы лишь при $\delta_i^{(1)} = 1$ и задача состоит
в оценивании условной функций выживания $1 - F_x$ по
выборке $S^{(n)}$. Такую задачу впервые при случайном
цензурировании справа рассматривал Беран [3],
предложив обобщенную оценку множительной
структуры из [5]. В дальнейшем эта оценка была
исследована также и в работах [7, 8]. Авторы [1, 2]
построили и исследовали класс степенных оценок в
различных моделях цензурирования. В условной
модели пропорциональных интенсивностей соответ-
ствующая степенная оценка исследована в [9]. В
настоящей работе рассматривается модель случайного
цензурирования с двух сторон и в ней также
исследуются оценки степенной структуры. Обозначим
через F_{x_i} , G_{x_i} , K_{x_i} и H_{x_i} непрерывные условные ф.р.
с.в. Z_i , Y_i , L_i и ξ_i при заданной ковариате $X = x_i$.
Тогда легко видеть, что

$$H_{x_i}(t) = K_{x_i}(t) [1 - (1 - G_{x_i}(t))(1 - F_{x_i}(t))], t \geq 0. \quad (1)$$

Рассмотрим случай, когда x_i являются фиксирован-
ными точками дизайна из $[0, 1]: 0 = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1$.
Далее для упрощения записи, вместо x_i будем писать
 x . Ввиду того, что в настоящей модели с.в. Z_x цензу-
рируются слева с.в. L_x , мы в состоянии оценить только
усеченную условную функцию выживания

$$1 - F_{\mu x}(t) = P(Z_i > t / Z_i \geq \mu), t \geq \mu \geq 0, \quad (2)$$

по выборке $S^{(n)}$, где μ выбирается подходящим
образом.

Для построения оценки для (2) введём вспомога-
тельные субраспределения:

$$Q_x^{(0)}(t) = P(\xi_x \leq t, \delta_x^{(0)} = 1) = \int_0^t [1 - (1 - G_x(s))(1 - F_x(s))] dK_x(s),$$

$$Q_x^{(1)}(t) = P(\xi_x \leq t, \delta_x^{(1)} = 1) = \int_0^t K_x(s)(1 - G_x(s)) dF_x(s),$$

$$Q_x^{(2)}(t) = P(\xi_x \leq t, \delta_x^{(2)} = 1) = \int_0^t K_x(s)(1 - F_x(s)) dG_x(s),$$

$$Q_x^{(0)}(t) + Q_x^{(1)}(t) + Q_x^{(2)}(t) = H_x(t), t \geq 0.$$

Рассмотрим вероятность

$$q_x(t) = P(L_x \leq t \leq \min(Z_x, Y_x)) = K_x(t) - H_x(t), t \geq 0,$$

а также интегральная функция интенсивности (и.ф.и.)
для ф.р. $F_{\tau x}$:

$$\Lambda_{\mu x}^{(1)}(t) = \int_{\mu}^t \frac{dF_{\mu x}(s)}{1 - F_{\mu x}(s)} = \int_{\mu}^t \frac{dQ_x^{(1)}(s)}{q_x(s)}, t \geq \mu \geq 0.$$

Введём также левостороннюю и.ф.и. для ф.р. K_x :

$$\Lambda_{\mu x}^{(0)}(t) = \int_t^{+\infty} \frac{dK_x(s)}{K_x(s)} = \int_t^{+\infty} \frac{dQ_x^{(0)}(s)}{H_x(s)}, t \geq \mu > 0.$$

Число $\mu = \mu(K_x, G_x, F_x)$ выбирается из условий:

$$\begin{cases} \inf_{t \in [\mu, +\infty] \cap Sp(N_x)} \{K_x(t)(1 - N_x(t))\} > 0, \\ \Gamma_{\mu x}^{(0)} \cap \Gamma_{\mu x}^{(1)} \neq \emptyset, \end{cases}$$

где

$$N_x(t) = 1 - (1 - G_x(t))(1 - F_x(t)) = P(\min(Z_x, Y_x) \leq t),$$

$$Sp(N_x) = \{t \geq 0: 0 < N_x(t) < 1\},$$

$$\Gamma_{\mu x}^{(0)} = \{t \geq \mu: 0 < \Lambda_{\mu x}^{(0)}(t) < \infty\},$$

$$\Gamma_{\mu x}^{(1)} = \{t \geq \mu: 0 < \Lambda_{\mu x}^{(1)}(t) < \infty\}.$$

Введём соответствующие оценки типа Стоуна [6] с
весами типа Гессера-Мюллера [4] для субраспреде-
лений $Q_x^{(m)}$, $m = 0, 1, 2$; ф.р. H_x и вероятности q_x :

$$Q_{xh}^{(m)}(t) = \sum_{i=1}^n \omega_{ni}(x; h_n) I(\xi_i \leq t, \chi_i^{(m)} = 1), m = 0, 1, 2, \quad (3)$$

$$H_{xh}(t) = \sum_{i=1}^n \omega_{ni}(x; h_n) I(\xi_i \leq t),$$

$$q_{xh}(t) = K_{xh}(t) - H_{xh}(t),$$

где

$$K_{xh}(t) = \exp \left\{ \int_t^{+\infty} \frac{dT_{xh}^{(0)}(s)}{H_{xh}(s)} \right\}, t \geq \mu, \quad (4)$$

– экспоненциальная оценка для ф.р. K_x и

$$\omega_{ni}(x; h_n) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h_n} \pi \left(\frac{x-y}{h_n} \right) dy \left(\int_0^{x_n} \frac{1}{h_n} \pi \left(\frac{x-y}{h_n} \right) dy \right)^{-1}, i = \overline{1, n}.$$

Здесь $x_0 = 0$, π – известная функция плотности
(ядро) и $\{h_n\}$ – последовательность положительных
постоянных (ширина окна), стремящихся к нулю при
 $n \rightarrow \infty$.

Аналогично, оценка для и.ф.и. $\Lambda_{\mu x}^{(1)}$ имеет вид

$$\Lambda_{\mu xh}^{(1)}(t) = \int_{\mu}^t \frac{dQ_{xh}^{(1)}(s)}{q_{xh}(s)}, t \geq \mu. \quad (5)$$

В [2] построена следующая степенная оценка для
 $1 - F_{\mu x}$:

$$1 - F_{\mu xh}(t) = \left[\frac{q_{xh}(t)}{q_{xh}(\mu)} \right]^{R_{\mu xh}(t)}, t \geq \mu, \quad (6)$$

где $R_{\mu xh}(t) = \Lambda_{\mu xh}^{(1)}(t) \left[- \int_{\mu}^t \frac{dq_{xh}(s)}{q_{xh}(s)} \right]^{-1}$ – соответ-
ствующая оценка для функции

$$R_{\mu x}(t) = \Lambda_{\mu x}^{(1)}(t) \left[- \int_{\mu}^t \frac{dq_x(s)}{q_x(s)} \right]^{-1}, t \geq \mu.$$

Далее введем следующие обозначения:

$$\underline{\Delta}_n = \min_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}), \quad \bar{\Delta}_n = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}),$$

$$\|\pi\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \pi^2(y) dy, \quad m_v(\pi) = \int_{-\infty}^{\infty} y^v \pi(y) dy, \quad v=1,2.$$

Рассмотрим условия:

$$(Y1) \quad \text{При } n \rightarrow \infty, \quad x_n \rightarrow 1, \quad \bar{\Delta}_n = O(n^{-1}),$$

$$\bar{\Delta}_n - \underline{\Delta}_n = o(n^{-1});$$

(Y2) Ядро π является плотностью с компактным носителем $[-M, M]$, при некотором $M > 0$, $m_1(\pi) = 0$ и π удовлетворяет условию Липшица.

Пусть $T_{H_x} = \inf \{t \geq 0 : H_x(t) = 1\}$ и

$$\tau_{H_x} = \sup \{t \geq 0 : H_x(t) = 0\}.$$

$$(Y3) \quad \ddot{H}_x(t) = \frac{\partial^2 H_x(t)}{\partial x^2}, \quad H_x''(t) = \frac{\partial^2 H_x(t)}{\partial t^2}, \quad \dot{H}_x'(t) = \frac{\partial^2 H_x(t)}{\partial x \partial t},$$

$$\ddot{Q}_x^{(m)}(t) = \frac{\partial^2 Q_x^{(m)}(t)}{\partial x^2}, \quad Q_x^{(m)*}(t) = \frac{\partial^2 Q_x^{(m)}(t)}{\partial t^2},$$

$$\dot{Q}_x^{(m)*}(t) = \frac{\partial^2 Q_x^{(m)}(t)}{\partial x \partial t}, \quad m=0,1 \text{ существуют и непрерывны}$$

для $(t, x) \in [\tau, T] \times [0, 1]$, где

$$\max(\tau_{F_x}, \tau_{G_x}, \tau_{K_x}) < \tau \leq t \leq T < \min(T_{F_x}, T_{G_x}, T_{K_x}).$$

Теорема 1 [2]. Пусть выполнены условия (Y1)-(Y3)

и при $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$, $\frac{\ln n}{nh_n} = o(1)$, $\frac{nh_n^5}{\ln n} = O(1)$. Тогда

для $\tau \leq t \leq T$:

$$\begin{aligned} F_{\mu x h}(t) - F_{\mu x}(t) &= \\ &= \sum_{i=1}^n \omega_{ni}(x; h_n) \Psi_{\mu x}(\xi_i, \delta_i^{(0)}, \delta_i^{(1)}, \delta_i^{(2)}) + R_n(t, x), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_{\mu x}(\xi_i, \delta_i^{(0)}, \delta_i^{(1)}, \delta_i^{(2)}) &= \\ &= (1 - F_{\mu x}(t)) \left\{ \int_{\mu}^t \frac{(I(\xi_i \leq s) - H_x(s)) - \lambda_{xh}(s)}{(K_x(s) - H_x(s))^2} dQ_x^{(1)}(s) + \right. \\ &+ \frac{I(\xi_i \leq t, \delta_i^{(1)} = 1) - Q_x^{(1)}(t)}{K_x(t) - H_x(t)} - \frac{I(\xi_i \leq \mu, \delta_i^{(1)} = 1) - Q_x^{(1)}(\mu)}{K_x(\mu) - H_x(\mu)} + \\ &+ \left. \int_{\mu}^t \frac{(I(\xi_i \leq s, \delta_i^{(1)} = 1) - Q_x^{(1)}(s)) d(K_x(s) - H_x(s))}{(K_x(s) - H_x(s))^2} \right\}, \\ \lambda_{xh}(t) &= K_x(t) \sum_{i=1}^n \left\{ \int_t^{+\infty} \frac{(I(\xi_i \leq s) - H_x(s)) dQ_x^{(0)}(s)}{H_x^2(s)} - \right. \\ &- \frac{I(\xi_i \leq t, \delta_i^{(0)} = 1) - Q_x^{(0)}(t)}{H_x(t)} - \\ &- \left. \int_t^{+\infty} \frac{(I(\xi_i \leq s, \delta_i^{(0)} = 1) - Q_x^{(0)}(s)) dH_x(s)}{H_x^2(s)} \right\}, \end{aligned}$$

и при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{\tau \leq t \leq T} |R_n(t, x)| = O((nh_n)^{-3/4} (\ln n)^{3/4}).$$

Теорема 2 [2]. В условиях теоремы 1 следует равномерно сильная состоятельность оценки (6) при $n \rightarrow \infty$:

$$\sup_{\tau \leq t \leq T} |F_{\mu x h}(t) - F_{\mu x}(t)| = O((nh_n)^{-1/2} (\ln n)^{1/2}).$$

II. Частично-информативная регрессионная модель при случайном цензурировании с двух сторон. Рассмотрим следующий специальный случай модели из I. Предположим, что пары (Z_x, Y_x) удовлетворяют условной модели пропорциональных интенсивностей [9]:

$$1 - G_x(t) = (1 - F_x(t))^{\beta_x}, \quad t \geq 0, \quad (7)$$

где β_x положительный неизвестный параметр.

Из формулы (1) и (7) находим следующее представление для $1 - F_x$:

$$1 - F_x(t) = \left[1 - \frac{H_x(t)}{K_x(t)} \right]^{\gamma_x}, \quad t \geq 0, \quad (8)$$

$$\gamma_x = \frac{1}{\beta_x + 1}. \quad \text{Формула (8) играет ключевую роль в}$$

построении оценки для $1 - F_x$.

Если учесть равенство (7), то

$$Q_x^{(1)}(t) = \int_0^t K_x(s) (1 - F_x(s))^{\beta_x} dF_x(s),$$

$$Q_x^{(2)}(t) = - \int_0^t K_x(s) (1 - F_x(s)) d(1 - F_x(s))^{\beta_x}$$

тогда получаем

$$P(\xi_x \leq t, \delta_x^{(2)} = 1) = \beta_x P(\zeta_x \leq t, \delta_x^{(1)} = 1). \quad (9)$$

Кроме того, если ввести обозначения $p_x^{(m)} = P(\delta_x^{(m)} = 1)$, $m=0,1,2$ и в равенстве (9) перейти к пределу при $t \rightarrow \infty$, то получим, $\gamma_x = \frac{1}{\beta_x + 1} = \frac{p_x^{(1)}}{p_x^{(1)} + p_x^{(2)}}$, которое с помощью (3) оценивается следующим образом:

$$\gamma_{xh} = \frac{p_{xh}^{(1)}}{p_{xh}^{(1)} + p_{xh}^{(2)}}, \quad (10)$$

где

$$p_{xh}^{(m)} = \sum_{i=1}^n \omega_{ni}(x; h_n) \delta_i^{(m)}, \quad m=1,2.$$

Теперь подставив оценки (3), (4) и (10) в (8), получаем оценку для $1 - F(\cdot / x)$ в виде

$$1 - \tilde{F}_{xh}(t) = \left[1 - \frac{H_{xh}(t)}{K_{xh}(t)} \right]^{\gamma_{xh}}, \quad t \geq 0. \quad (11)$$

Легко видеть, что ввиду условий (7) в рассматриваемой модели

$$T_{F_x} = T_{G_x} = \inf \{t \geq 0 : F_x(t) = 1\} \text{ и}$$

$$\tau_{F_x} = \tau_{G_x} = \sup \{t \geq 0 : F_x(t) = 0\}.$$

Рассмотрим условия (Y1) и (Y2), а также условия

$$(Y3)' \quad \ddot{H}_x(t) = \frac{\partial^2 H_x(t)}{\partial x^2}, \quad H_x''(t) = \frac{\partial^2 H_x(t)}{\partial t^2}, \quad \dot{H}_x'(t) = \frac{\partial^2 H_x(t)}{\partial x \partial t}, \quad \text{где}$$

$$\ddot{Q}_x^{(0)}(t) = \frac{\partial^2 Q_x^{(0)}(t)}{\partial x^2}, \quad Q_x^{(0)'}(t) = \frac{\partial^2 Q_x^{(0)}(t)}{\partial t^2}, \quad \dot{Q}_x^{(0)'}(t) = \frac{\partial^2 Q_x^{(0)}(t)}{\partial x \partial t}$$

существуют и непрерывны для $(t, x) \in [\tau, T] \times [0, 1]$, где

$$\max(\tau_{F_x}, \tau_{K_x}) < \tau \leq t \leq T < \min(T_{F_x}, T_{K_x}).$$

$$(Y4)' \quad \ddot{p}_x^{(m)} = \frac{d^2 p_x^{(m)}}{dx^2}, \quad m=1, 2 \text{ существуют и непре-}$$

рывны для $x \in [0, 1]$.

Справедливо следующее утверждение в асимптотическом представлении оценок (11) в виде взвешенной суммы с оценкой остаточного члена, т.е. аналог теоремы 1.

Теорема 3. Пусть выполнены условия (Y1)-(Y4)' и при $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$, $\frac{\ln n}{nh_n} = o(1)$, $\frac{nh_n^5}{\ln n} = O(1)$. Тогда

для $\tau \leq t \leq T$:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{xh}(t) - F_x(t) &= \\ &= \sum_{i=1}^n \omega_{ni}(x; h_n) \tilde{\Psi}_{tx}(\xi_i, \delta_i^{(0)}, \delta_i^{(1)}, \delta_i^{(2)}) + \tilde{R}_n(t, x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{tx}(\xi_i, \delta_i^{(0)}, \delta_i^{(1)}, \delta_i^{(2)}) &= \gamma_x(1 - F_x(t)) \left\{ \frac{I(\xi_i \leq t) - H_x(t)}{K_x(t) - H_x(t)} - \right. \\ &\quad - \frac{H_x(t)}{K_x(t) - H_x(t)} \cdot \left(\int_t^{+\infty} \frac{I(\xi_i \leq s) - H_x(s)}{H_x^2(s)} dQ_x^{(0)}(s) \right) - \\ &\quad - \frac{I(\xi_i \leq s, \delta_i^{(0)} = 1) - Q_x^{(0)}(s)}{H_x(t)} - \\ &\quad - \int_t^{+\infty} \frac{I(\xi_i \leq s, \delta_i^{(0)} = 1) - Q_x^{(0)}(s)}{H_x^2(s)} dH(s/x) \\ &\quad \left. - \frac{1}{(p_x^{(1)})^2} \ln(1 - F_x(t)) \left[p_x^{(2)}(\delta_i^{(1)} - p_x^{(1)}) - p_x^{(1)}(\delta_i^{(2)} - p_x^{(2)}) \right] \right\} \end{aligned}$$

и при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{\tau \leq t \leq T} |\tilde{R}_n(t, x)| = O((nh_n)^{-3/4} (\ln n)^{3/4}).$$

Теорема 4. В условиях теоремы 3 следует равномерно сильная состоятельность оценки (11) при $n \rightarrow \infty$:

$$\sup_{\tau \leq t \leq T} |\tilde{F}_{xh}(t) - F_x(t)| = O((nh_n)^{-1/2} (\ln n)^{1/2}).$$

Литература

1. Abdushukurov A.A., Abdikalikov F.A. Estimation of conditional distribution function under nonparametric regression with fixed design. // Mathem. Sciences, 2022, vol. 267, №1. – P. 132-138.
2. Abdikalikov F.A., Seytaxov R.P. On nonparametric estimates of the survival function in fixed design regression model of random censoring from both sides. // AIP Conf. Proc. 3147, 020006 (2024). – P. 020006-1 - 020006-7.
3. Beran R. Nonparametric regression with randomly censored survival data. Technical Report. Univ. – California. Berkeley, 1981, 19 p.
4. Gasser T., Müller H.G. Kernel estimation of regression function. Lecture Notes in Mathematics. – New York: Springer, 1977.
5. Kaplan E.L., Meier P. Nonparametric estimation from incomplete observations. // J.A.S.A., 1958, vol. 53. – P. 457-481.
6. Stone C.J. Consistent nonparametric regression. // Ann. Statist., 1977, vol. 5. – P. 595-645.
7. Van Keilegom I., Veraverbeke N. Uniform strong convergence for the conditional Kaplan-Meier estimator and its quantiles. Commun. Statist. // Th.&Meth., 1996, vol. 25. – P. 2251-2265.
8. Van Keilegom I., Veraverbeke N. Estimation and bootstrap with censored data in fixed design nonparametric regression. // Ann. Inst. Statist. Math., 1997, vol. 49, №3. – P. 467-491.
9. Veraverbeke N., Cadarso-Suarez C. Estimation of the conditional distribution in a conditional Koziol-Green model, 2000, Test, vol. 9. – P. 97-122.