

ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА К КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА С НЕЛИНЕЙНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

О.Д.Нуржанов – кандидат физико-математических наук, доцент
Каракалпакский государственный университет имени Бердаха

Б.О.Нуржанов – доктор философии по физико-математическим наукам, старший научный сотрудник
Институт математики имени В.И.Романовского АН РУз

НОЧИЗИҚЛИ ЧЕГАРАВИЙ ШАРТЛАРГА ЭГА ВОЛЬТЕРРА ТИПИДАГИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАРГА СОНЛИ-АНАЛИТИК УСУЛНИНГ ҚЎЛЛАНИЛИШИ

О.Д.Нуржанов – физика-математика фанлари номзоди, доцент
Бердақ номидаги Қорақалпоқ давлат университети

Б.О.Нуржанов – физика-математика фанлари бўйича философия доктори, катта илмий ходим
В.И.Романовский номидаги Математика институти, Ўзбекистон ФА

APPLICATION OF A NUMERICAL-ANALYTIC METHOD TO BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF VOLTERRA TYPE WITH NONLINEAR BOUNDARY CONDITIONS

O.D.Nurzhanov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
Karakalpak State University named after Berdakh

B.O.Nurzhanov – Doctor of Philosophy in Physics and Mathematics, Senior Researcher
V.I.Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan

Таянч сўзлар: чегаравий масала, сонли-аналитик усул, Вольтерра типигаги интегро-дифференциал тенгламалар, ночизикли чегаравий шарт.

Резюме. Ушбу ишда кетма-кет яқинлашишларнинг сонли-аналитик усулидан фойдаланган ҳолда, ночизикли чегаравий шартларга эга Вольтерра типигаги интегро-дифференциал тенгламалар системалари учун чегаравий масала ўрганилади.

Ключевые слова: краевая задача, численно-аналитический метод, интегро-дифференциальные уравнения типа Вольтерра, нелинейное краевое условие.

Резюме. В данной работе при помощи численно-аналитического метода последовательных приближений исследуется краевая задача для систем интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с нелинейными краевыми условиями.

Key words: boundary-value problem, numerical-analytic method, Volterra-type integro-differential equations, nonlinear boundary condition.

Summary. In this work, a boundary-value problem for systems of Volterra-type integro-differential equations with nonlinear boundary conditions is investigated using the numerical-analytic method of successive approximations.

Численно-аналитический метод последовательных приближений [1-4] зарекомендовал себя как эффективный инструмент для изучения краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. Многие исследования, такие как работы [5-7], посвящены адаптации и применению этого метода к различным классам краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений.

В настоящей работе данный подход используется для исследования решений нелинейной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с нелинейными граничными условиями.

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра вида

$$\frac{dy}{dt} = f\left(t, y, \int_0^t \varphi(t, s, y(s))ds\right), \quad t \in [0, T] \quad (1)$$

при двухточечных нелинейных краевых условиях

$$g(y(0), y(T)) = 0, \quad (2)$$

где $f: [0, T] \times G \times G_1 \rightarrow R^n$, $\varphi: [0, T] \times [0, T] \times G \rightarrow R^n$, $g: G \times G \rightarrow R^n$, $G \subset R^n$, $G_1: \|z\| \leq Th_\varphi$ - шар пространства R^n , $h_\varphi = \max_{(t,s) \in [0,T] \times [0,T], y \in G} \|\varphi(t, s, y)\|$.

Предположим, что правая часть системы уравнений (1) и левая часть краевого условия (2) удовлетворяют следующим условиям:

1) вектор-функции $f(t, y, z)$ и $\varphi(t, s, x)$ определены и непрерывны в области

$$(t, s, x, z) \in [0, T] \times [0, T] \times G \times G_1,$$

при этом они ограничены и удовлетворяют условию Липшица для всех (t, y, z) ,

$$\begin{aligned} (t, \bar{y}, \bar{z}) &\in [0, T] \times G \times G_1, & (t, s, y), \\ (t, s, \bar{y}) &\in [0, T] \times [0, T] \times G: \\ |f(t, y, z)| &\leq M, \\ |f(t, y, z) - f(t, \bar{y}, \bar{z})| &\leq K_1 |y - \bar{y}| + K_2 |z - \bar{z}|, & (3) \\ |\varphi(t, s, y) - \varphi(t, s, \bar{y})| &\leq K_3 |y - \bar{y}|, \end{aligned}$$

где $M = (M_1, M_2, \dots, M_n)$ - n -мерный постоянный вектор с положительными компонентами $M_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$; $K_l = \{k_{ij} \geq 0\}$, $l = 1, 2, 3$; $i, j = 1, 2, \dots, n$ - постоянные матрицы с неотрицательными элементами k_{ij} ; здесь $|f| = (|f_1|, |f_2|, \dots, |f_n|)$.

2) функция $g(u, v)$ определена и непрерывна в области $(u, v) \in \Omega = G \times G$.

Пусть A и B - постоянные матрицы, определитель матрицы B отличен от нуля ($\det B \neq 0$). Тогда с помощью этих матриц краевая задача (1), (2) записывается в виде

$$\frac{dy}{dt} = f\left(t, y(t), \int_0^t \varphi(t, s, y(s)) ds\right), \quad (4)$$

$$Ay(0) + By(T) = \Phi(y(0), y(T)), \quad (5)$$

где функция $\Phi(u, v)$ задается как

$$\Phi(u, v) = Au + Bv + g(u, v).$$

Для дальнейшего исследования краевой задачи (4), (5) можно воспользоваться общей заменой переменных, предложенной в работах [1, 2]. Однако, следуя подходу из работы [4], сделаем более простую замену

$$y(t) = x(t) + w, \quad (6)$$

где $w \in \Omega \subset R^n$ - некоторый (неизвестный) параметр. Область Ω выбирается так, чтобы выполнялось условие $D + \Omega \subset G$, где D - замкнутая ограниченная подобласть в G . Тогда новая переменная $x(t)$ должна иметь область значений в D .

Замена (6) приводит систему (4), (5) к следующему виду:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(t, x(t) + w, \int_0^t \varphi(t, s, x(s) + w) ds\right), \quad (7)$$

$$Ax(0) + Bx(T) = \Phi(x(0) + w, x(T) + w) - (A + B)w, \quad (8)$$

где задача (7), (8) рассматривается в области $(t, x, z) \in [0, T] \times D \times G_1$. Параметр w естественно определить из дополнительного уравнения

$$\Phi(x(0) + w, x(T) + w) - (A + B)w = 0$$

или, что эквивалентно,

$$Ax(0) + Bx(T) + g(x(0) + w, x(T) + w) = 0. \quad (9)$$

Таким образом, исходная нелинейная краевая задача (1), (2) является эквивалентной системе (7), (8), (9).

Систему (7), (8), (9) можно рассматривать как совокупность задач

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(t, x(t) + w, \int_0^t \varphi(t, s, x(s) + w) ds\right), \quad (10)$$

$$Ax(0) + Bx(T) = 0, \quad (11)$$

параметризованных по w , принадлежащим некоторому (неизвестному) множеству.

Итак, исследование исходной краевой задачи с нелинейными граничными условиями (2) сводится к исследованию краевой задачи (10), (11) с линейными граничными условиями (11). Это позволяет применить для её изучения численно-аналитический метод [2, 5].

Предположим, что выполняются следующие условия:

а) множество

$$D_\beta := \{x \in R^n \mid B(x, \beta(x)) \subset D\} \quad (12)$$

не пусто, где

$$\beta(x) := \frac{T}{2} M + |(B^{-1}A + E)x_0|;$$

б) наибольшее собственное значение $\lambda_{\max}(Q)$

матрицы $Q = \frac{T}{3} \left(K_1 + \frac{9}{8} TK_2 K_3 \right)$ удовлетворяет неравенству:

$$\lambda_{\max}(Q) < 1. \quad (13)$$

При этих предположениях, согласно численно-аналитическому методу, решение краевой задачи (10), (11) ищется как предел равномерно сходящихся последовательности функций $x_m(t, x_0, w)$, зависящих от параметров x_0 и w :

$$\begin{aligned} x_m(t, x_0, w) &= x_0 + \\ &+ \int_0^t \left[f\left(\tau, x_{m-1}(\tau, x_0, w) + w, \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x_{m-1}(s, x_0, w) + w) ds\right) - \right. \\ &- \left. \frac{1}{T} \int_0^T f\left(\tau, x_{m-1}(\tau, x_0, w) + w, \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x_{m-1}(s, x_0, w) + w) ds\right) d\tau \right] d\tau - \\ &- \frac{t}{T} (B^{-1}A + E)x_0, \quad m = 1, 2, \dots, \\ x_0(t, x_0, w) &= x_0, \end{aligned} \quad (14)$$

где E - $(n \times n)$ -мерная единичная матрица.

Все члены последовательности (14) удовлетворяют краевым условиям (11) для всех $x_0 \in D_\beta$ и $w \in \Omega$. Более того, $x_m(0, x_0, w) = x_0$ для всех $m \in \mathbb{N}$.

В силу условия (11) решение $x(t)$ уравнений (10), (11) удовлетворяет условию

$$x(T) = -B^{-1}Ax(0),$$

и, следовательно, уравнение (9) можно переписать в виде

$$g(x(0) + w, -B^{-1}Ax(0) + w) = 0. \quad (15)$$

Таким образом, задача (9), (10), (11) оказывается эквивалентной системе (10), (11), (15). Предлага-

гается решать её поэтапно: сначала найти решение для (10), (11), а затем попытаться выяснить, выполняется ли (15).

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Предположим, что выполнены условия (3), (12), (13). Тогда

1) последовательность (14) имеет предел $x^*(t, x_0, w)$, равномерный по $(t, x_0) \in [0, T] \times D_\beta$;

2) функция $x^*(t, x_0, w)$ является решением «возмущенной» краевой задачи:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(t, x(t) + w, \int_0^t \varphi(\tau, s, x(s) + w) ds\right) + \Delta(x_0, w),$$

$$Ax(0) + Bx(T) = 0,$$

где возмущение $\Delta(x_0, w)$ определяется как:

$$\Delta(x_0, w) = -\frac{1}{T}(B^{-1}A + E)x_0 - \frac{1}{T} \int_0^T f\left(\tau, x^*(\tau, x_0, w) + w, \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x^*(s, x_0, w) + w) ds\right) d\tau, \quad (16)$$

$$\left(\tau, x^*(\tau, x_0, w) + w, \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x^*(s, x_0, w) + w) ds\right) d\tau,$$

кроме того, $x^*(0, x_0, w) = x_0$.

3) справедлива оценка погрешностей:

$$|x^*(t, x_0, w) - x_m(t, x_0, w)| \leq \alpha_1(t)W(x_0, w),$$

где

$$\alpha_1(t) = 2t\left(1 - \frac{t}{T}\right),$$

$$W(x_0, w) = Q^m(E - Q)^{-1}M + Q^{m-1}(E - Q)^{-1}Q_1\beta(x_0),$$

$$Q_1 = K_1 + \frac{3T}{4}K_2K_3.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1 из [5].

Поскольку система (10) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f\left(\tau, x(\tau) + w, \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x(s) + w) ds\right) d\tau,$$

то задача решения краевой задачи (10), (11)

сводится к нахождению такого значения x_0 , при котором вектор-функция $\Delta(x_0, w)$, заданная соотношением (16), становится равной нулю.

Таким образом, справедливы следующие утверждения.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы

1. Тогда функция $x^*(t, x_0^*, w)$ является решением краевой задачи (10), (11) тогда и только тогда, когда $x_0 = x_0^*$ удовлетворяет определяющему уравнению

$$\left[B^{-1}A + E\right]x_0 + \int_0^T f\left(\tau, x^*(\tau, x_0, w) + w, \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x^*(s, x_0, w) + w) ds\right) d\tau = 0,$$

где w рассматривается как параметр.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы

1. Тогда для того, чтобы функция $x^*(t, x_0^*, w^*) + w^*$ была решением краевой задачи (1), (2), достаточно, чтобы параметры $x_0 = x_0^*$ и $w = w^*$ удовлетворяли системе определяющих уравнений:

$$\left[B^{-1}A + E\right]x_0 + \int_0^T f\left(\tau, x^*(\tau, x_0, w), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x^*(s, x_0, w)) ds\right) d\tau = 0, \quad (17)$$

$$g(x_0 + w, -B^{-1}Ax_0 + w) = 0. \quad (18)$$

При этом функция

$$y^*(t) = x^*(t, x_0^*, w^*) + w^*$$

является решением краевой задачи (1), (2).

Доказательство. Из вида подстановки (6) следует, что уравнения (17) и (18) справедливы, если преобразованная краевая задача (10), (11), (15) эквивалентна исходной краевой задаче (1), (2).

Литература

1. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы в теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: «Наукова думка», 1992.
2. Самойленко А.М., Ле Лионг Тай. Об одном методе исследования краевых задач с нелинейными граничными условиями. // Укр. мат. журн., 42(7), 1990. – С. 951-957.
3. Ronto M., Samoilenko A. M. Numerical-analytic methods in the theory of boundary-value problems, River Edge, NJ: World Scientific Publishing Co. Inc., 2000.
4. Ronto A., Ronto M. On the investigation of some boundary value problems with non-linear conditions. // Miskolc Mathematical Notes, 1(1), 2000. – P. 43-55.
5. Нуржанов О.Д., Курбанбаев О.О., Баймуратова К.А. Численно-аналитический метод исследования краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра. // Вестник Каракалпакского государственного университета им. Бердаха, №1-2, 2011. – С. 10 - 16.
6. Nurzhanov O.D. Application of a modification of the numerical-analytic method to the multipoint boundary-value problem for Volterra-type integrodifferential equations. Journal of Mathematical Sciences, 258, 2021. – P. 655-669.
7. Нуржанов Б.О., Омаров Т. О приближенном решении краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с функциональными краевыми условиями. // Наука и общество, №3, 2020. – С. 13-5.