

ОБЩЕЕ НЕПРЕРЫВНОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С 1-ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Х.Тураев – кандидат физико-математических наук, доцент

М.Эштурсунов – преподаватель

Х.Норкобилов – преподаватель

Термезский государственный педагогический институт

Таянч сўзлар: умумий, узлуксиз, ечим, тенглама, матрица, даврий, ўлчов, айирмали тенглама, матрица-нинг ўлчови.

Ключевые слова: общее, непрерывное, решение, уравнения, матрица, периодическое, размерность, разностное уравнения, размерность матрицы.

Key words: general, continuous, solution, equation, matrix, periodic, dimension, differential equation, dimension of matrix.

Рассмотрим систему линейных разностных уравнений

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t), \quad (1)$$

где $t \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $A(t)$ – вещественная непрерывная 1-периодическая $n \times n$ – матрица, $B(t)$ – вещественный 1- периодический вектор размерности n .

Будем исследовать вопрос о построении 1 – периодических решений системы (1) и их свойствах.

Обозначим $\lambda_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ – корни характеристического уравнения

$$\det[A(t) - \lambda(t)E] = 0, \quad (2)$$

где E – единичная матрица (нетрудно показать, что $\lambda_i(t)$ – непрерывные, 1- периодические функции).

Предположим, что $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)$ и $\lambda_i(t) \neq 0$ при $t \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $i, j = 1, \dots, n$. Тогда существует не особое преобразование

$$x(t) = C(t)y(t), \quad (3)$$

где $C(t)$ – непрерывная 1- периодическая $n \times n$ – матрица, такая что в новых переменных система уравнений (1) примет вид

$$y(t+1) = \Lambda(t)y(t) + C^{-1}(t)B(t), \quad (4)$$

где $\Lambda(t) = \text{diag}(\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t))$.

Пусть выполняется условие $\lambda_i(t) \neq 1, i = 1, \dots, n$. Тогда система уравнений (4) имеет единственное непрерывное, 1- периодическое решение $\bar{y}(t) = (E - \Lambda(t))^{-1}C^{-1}(t)B(t)$.

Выполняя в (4) замену переменных

$$y(t) = z(t) + \bar{y}(t), \quad (5)$$

Получим

$$z(t+1) = \Lambda(t)z(t). \quad (6)$$

Общее непрерывное решение системы уравнений (6) имеет вид

$$z_i(t) = \lambda_i^t(t)\omega_i(t), i = 1, \dots, n, \quad (7)$$

где $\omega_i(t)$ – произвольные непрерывные 1 периодические функции [3].

Принимая во внимание (3),(5),(7) можно выписать общее непрерывное решение уравнения (1).

Именно,

$$x(t) = C(t)[\Lambda(t)^t\omega(t) + (E - \Lambda(t))^{-1}C^{-1}(t)B(t)], \quad (8)$$

где $\Lambda(t)^t\omega(t) = (\lambda_1^t(t)\omega_1(t), \dots, \lambda_n^t(t)\omega_n(t))$.

Из (8) вытекает ряд выводов:

Пусть

$$|\lambda_i(t)| \leq \alpha < 1 < \beta \leq |\lambda_j(t)|, i = 1, \dots, p, j = p + 1, \dots, n.$$

Тогда:

1) Существует множество непрерывных решений системы (1), зависящее от p произвольных непрерывных, 1 – периодических функций, удовлетворяющих условию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - C(t)\bar{y}(t)| = 0,$$

где

$$|x(t)| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

2) Существует множество решений системы (1), зависящее от $n - p$ произвольных непрерывных, 1 – периодических функций, удовлетворяющих условию

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |x(t) - C(t)\bar{y}(t)| = 0.$$

Теперь, предположим, что среди корней характеристического уравнения (2) имеются кратные. Тогда при помощи преобразования (3) систему уравнений (1) можно привести к виду

$$y(t+1) = \Lambda(t)y(t) + C^{-1}(t)B(t), \quad (9)$$

где

$\Lambda(t) = \text{diag}(\Lambda_1(t), \dots, \Lambda_s(t))$, Λ_j – $p_j \times p_j$ – матрицы вида

$$\Lambda_j(t) = \begin{pmatrix} \lambda_j(t) & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j(t) & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_j(t) \end{pmatrix}, j = 1, \dots, s,$$

$$\sum_{j=1}^s p_j = n.$$

Предположим, $\lambda_i(t) \neq 1, j = 1, \dots, s$. Тогда нетрудно показать, что $\det[\Lambda(t) - E] \neq 0$ и, следовательно, система уравнений (9) имеет единственное непрерывное, 1-периодическое решение:

$$\bar{y}(t) = (E - \Lambda(t))^{-1}C(t)^{-1}B(t).$$

С помощью замены переменных (5) система уравнений (9) приводится к виду

$$Z(t+1) = \Lambda(t)Z(t). \quad (10)$$

Решение системы (10) сводится к решению s независимых подсистем уравнений вида

$$Z^j(t+1) = \Lambda_j(t)Z^j(t), j = 1, \dots, s \quad (11)$$

где

$$Z^j = (Z_1^j, \dots, Z_{p_j}^j), \quad \sum_{j=1}^s p_j = n.$$

Поскольку,

$$Z_1^j(t+1) = \lambda_1(t)Z_1^j(t) + Z_2^j(t), \quad (12)$$

$$Z_{p_j-1}^j(t+1) = \lambda_j(t)Z_{p_j-1}^j(t) + Z_{p_j}^j(t),$$

$$Z_{p_j}^j(t+1) = \lambda_j(t)Z_{p_j}^j(t), \quad j=1,2,\dots,s,$$

то решая p_j -ое уравнение системы (12) и подставляя полученное решение в $p_j - 1$ -ое уравнение и т.д., мы получим общее непрерывное решение системы (12). Именно,

$$\begin{aligned} Z_{p_j}^j(t) &= \lambda_j^t(t)\omega_{p_j}^j(t), \\ Z_{p_j-1}^j(t) &= \lambda_j^t(t)\omega_{p_j-1}^j(t) + t\lambda_j^{t-1}(t)\omega_{p_j}^j(t), \\ &\dots \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} Z_1^j(t) &= \lambda_1^t(t)\omega_1^j(t) + t\lambda_1^{t-1}(t)\omega_2^j(t) + \dots \\ &+ \left(\sum_{l=1}^{p_j-1} \alpha_l^j t^l \right) \lambda_j^{t-p_j+1}(t)\omega_{p_j}^j(t), \end{aligned}$$

где $\alpha_l^j, l = 1, \dots, p_j - 1, 1 \leq j \leq s$ – некоторые постоянные, $\omega_1^j(t), \dots, \omega_{p_j}^j(t), 1 \leq j \leq s$, – произвольные непрерывные 1-периодические функции. Следовательно, принимая во внимание (3), (5) и (13), можно выписать представление общего непрерывного решения системы (1), из которого также можно получить ряд выводов о свойствах непрерывных решений.

Пусть теперь рассмотрим случай, когда матрица $A(t)$ и вектор $B(t)$ являются m -периодическими (m – любое целое положительное число). Тогда из (1) непосредственно следует

$$\begin{aligned} x(t+2) &= A(t+1)x(t+1) + B(t+1) \\ &= A(t+1)(A(t)x(t) + B(t)) + \\ &+ B(t+1) = A(t+1)A(t)x(t) + A(t+1)B(t) + \\ &+ B(t+1), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} x(t+m) &= A(t+m-1) \dots A(t)x(t) \\ &+ A(t+m-1) \dots A(t+1)B(t) + \\ &+ A(t+m-1)B(t+m-2) + B(t+m-1) \end{aligned}$$

Если $x(t)$ – некоторое решение системы уравнений (1), то оно удовлетворяет системе (14). Следовательно, если все решения (14) обладают некоторым свойством, то этим свойством обладают также решения системы (1). Используя это обстоятельство, будем рассматривать систему уравнений (14), для которой можно провести исследование аналогично тому, как это было сделано ранее в случае 1-периодических матриц $A(t)$ и вектора $B(t)$.

Действительно, пусть $\lambda_i(t), i = 1, 2, \dots, n$ – корни характеристического уравнения

$$\det|\bar{A}(t) - \lambda(t)| = 0,$$

где

$$\bar{A}(t) = A(t+m-1) \dots A(t+1)A(t),$$

и выполняются условия:

- 1) $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t), i, j = 1, 2, \dots, n, \lambda_i(t) \neq 0, t \in R;$
- 2) $|\lambda_i(t)| \leq \alpha < 1 < \beta \leq |\lambda_j(t)|, i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, q, p + q = n.$

Тогда существует неособая замена переменных

$$x(t) = C(t)y(t), \quad (15)$$

где $C(t)$ – непрерывная m -периодическая матрица, приводящая систему (14) к виду

$$y(t+m) = \Lambda(t)y(t) + C^{-1}\bar{B}(t) \quad (16)$$

где $\Lambda(t) = \text{diag}(\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t), \bar{B}(t) = A(t+m-1) \dots A(t+1)B(t) +$

$$+ \dots + A(t+m-1)B(t+m-2) + B(t+m-1).$$

Поскольку $\lambda_i(t) \neq 1, i = 1, 2, \dots, n$, то система уравнений (16)

Имеет единственное непрерывное m -периодическое решение

$$\bar{y}(t) = (E - \Lambda(t))^{-1}C^{-1}(t)\bar{B}(t).$$

Полагая в (16)

$$y(t) = z(t) + \bar{y}(t), \quad (17)$$

Получим

$$z(t+m) = \Lambda(t)z(t). \quad (18)$$

Общее непрерывное решение системы уравнений (18) имеет вид [3, 4]

$$z_i(t) = \lambda_i^m(t)\omega_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (19)$$

где $\omega_i(t)$ – произвольные непрерывные, m – периодические функции.

Принимая во внимание (15), (17), (19) получим общее непрерывное решение системы (14)

$$\begin{aligned} x_i(t) &= \sum_{j=1}^n C_{ij}(t)\lambda_j^m(t)\omega_j(t) + \\ &+ \sum_{j=1}^n C_{ij}(t)\bar{y}_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (20)$$

где $y_i(t), i = 1, 2, \dots, n$ – компоненты вектора $\bar{y}(t)$.

Из последних соотношений, используя условие 2), можно сделать выводы, аналогичные тем, которые мы сделали в случае $m = 1$.

Так как представление (20) имеет место для всех непрерывных решений системы (14), а непрерывные решения системы (1) являются непрерывными решениями системы уравнений (14), то для любого из них справедливо представление (20).

Все предыдущие рассуждения касались случая, когда $\lambda_i(t) \neq 1, i = 1, \dots, n$, при всех $t \in R$.

Теперь мы предположим, что среди $\lambda_i(t), i = 1, 2, \dots, n$, имеются равные 1. Тогда с помощью преобразования (15) исследование системы уравнений (16) сводится к исследованию S подсистем вида

$$y^j(t+m) = \Lambda_j(t)y^j(t) + \bar{b}^j(t), j = 1, \dots, s,$$

$$y^j = (y_1^j, \dots, y_{p_j}^j), \sum_{j=1}^s p_j = n, \bar{b}^j(t) \text{ – непрерывные, } m \text{ – периодические векторы размерности } p_j.$$

Рассмотрим подсистему, соответствующую $\lambda_i(t) = 1$.

Именно,

$$\begin{aligned} y_1^j(t+m) &= y_1^j(t) + y_2^j(t) + \bar{b}_1^j(t) \\ y_{p_j-1}^j(t+m) &= y_{p_j-1}^j(t) + y_{p_j}^j(t) + \bar{b}_{p_j-1}^j(t), \\ y_{p_j}^j(t+m) &= y_{p_j}^j(t) + \bar{b}_{p_j}^j(t), \end{aligned} \quad (21)$$

где решение ищется в виде $y_{p_j}^j(t)$.

Решая последовательно, начиная с последнего, уравнения (21), получим частное решение

$$\bar{y}_{p_j}^j(t) = \frac{1}{m} \bar{b}_{p_j}^j(t)t, \\ \bar{y}_{p_{j-1}}^j(t) = \frac{1}{2m^2} \bar{b}_{p_j}^j(t)t^2 + \left(\frac{1}{m} \bar{b}_{p_{j-1}}^j(t) - \frac{1}{2} \bar{b}_{p_j}^j(t) \right) t, \quad (22)$$

$$\bar{y}_1^j(t) = \sum_{l=1}^{p_j} \bar{y}_{1,l}^j(t)t^l,$$

где $\bar{y}_{1,l}^j(t)$, $l = 1, \dots, p_j$ – некоторые непрерывные, m – периодически е функции, выражающиеся через $\bar{b}_l^j(t)$, $l = 1, \dots, p_j$.

Так как преобразование

$$y_1^j(t) = z_1^j(t) + \bar{y}_1^j(t), \dots, y_{p_j}^j(t) = z_{p_j}^j(t) + \bar{y}_{p_j}^j(t), \quad (23)$$

$\bar{y}_l^j(t)$, $l = 1, \dots, p_j$, определяются формулами (22), приводит систему (21) к виду

$$z_1^j(t+m) = z_1^j(t) + z_2^j(t),$$

$$z_{p_{j-1}}^j(t+m) = z_{p_{j-1}}^j(t) + z_{p_j}^j(t), \quad (24)$$

$$z_{p_j}^j(t+m) = z_{p_j}^j(t),$$

общее непрерывное решение которой имеет вид

$$z_{p_j}^j(t) = \omega_{p_j}^j(t), \\ z_{p_{j-1}}^j(t) = \omega_{p_{j-1}}^j(t) + \frac{1}{m} t \omega_{p_j}^j(t), \quad (25)$$

$$z_1^j(t) = \omega_1^j(t) + \frac{1}{m} t \omega_2^j(t) + \left(\sum_{i=1}^{p_j-1} \alpha_i^j t^i \right) \omega_{p_j}^j(t),$$

где α_i^j – некоторые постоянные и $\omega_1^j(t), \dots, \omega_{p_j}^j(t)$ – произвольные непрерывные m – периодические функции [3, 4].

Таким образом, принимая во внимание (15), (22), (23) и (25), получим представление любого непрерывного решения системы (14) и, следовательно, любого непрерывного решения системы уравнений (1).

Литература

1. Пелюх Г.П., Шарковский А.Н. О линейных разностных уравнениях с периодическими коэффициентами. В кн.: Качественные методы теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Киев: Ин-т математики АН УССР. 1997. С.91-100.
 2. Быков Я.В., Боташев А.И. О периодических решениях систем разностных уравнений // Изв. АН Киргизской ССР. 1970. №3. С.11-19.
 3. Турдиев Т., Шарипова Т. Линейные функционально-разностные уравнения. // Изв.АН УзССР, №1, 1975.
 4. Тураев Х. О структуре непрерывных решений систем линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами. В кн.: Краевые задачи для дифференциальных уравнений смешанных типов. -Ташкент: «Фан». 1990.
- РЕЗЮМЕ.** Ушбу ишда $x(t+1)=A(t)x(t)+B(t)$ кўринишдаги коэффициентлари 1 га тенг бўлган чизикли айирмалар системасининг узлуксиз ечимларини тузиш масалалари ўрганилган. Бу ердат $t \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $A(t)$ – даври 1 га тенг бўлган хакикий узлуксиз $n \times n$ матрица, $B(t)$ – даври 1 га тенг бўлган n ўлчовли хакикий вектор.

РЕЗЮМЕ. В настоящей работе изучается вопросы построения непрерывного решения систем линейных разностных уравнений с 1-периодическими коэффициентами следующего вида: $x(t+1)=A(t)x(t)+B(t)$ где $t \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $A(t)$ – вещественная непрерывная 1-периодическая $n \times n$ – матрица, $B(t)$ – вещественный 1- периодический вектор размерности n .

SUMMARY. This work studies the problems of constructing continuous solutions of a system of linear differential equations of the form $x(t+1)=A(t)x(t)+B(t)$ with coefficients equal to 1. Here $t \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $A(t)$ is a real continuous $n \times n$ matrix with period 1, $B(t)$ is a real n -dimensional vector with period 1.

NOTT VA DE-MASSA NAZARIYASIGA ASOSAN TUNNEL DIODNING O'TISH VAQTINI HISOBLASH

M.K.O'ktamova – dotsent

A.A.Mamatsboyev – magistrant

Namangan muhandislik-qurilish instituti

Tayanch so'zlar: Nott va De-Massa nazariyasi, diffuziya sig'imi, tunnel diodning o'tish vaqti.

Ключевые слова: теория Нотта и Де-Масса, диффузионная емкость, время включения туннельного диода.

Key words: Nott and De-Massa theory, diffusion capacitance, turn-on time of a tunnel diode.

Kirish. Texnologiyalar jadallik bilan rivojlanib borayotgan davrda ularga bo'lgan talab ham ortib boradi. Tunnel diodlaridan kosmik apparatlarni yasashda keng qo'llaniladi. Ba'zi kosmik apparatlardan o'rganayotgan obyekti haqidagi ma'lumotni ishonchli saqlashi yoki tezlik bilan ma'lumotni subyektga yetkazishi talab etiladi. Katta hajmdagi ma'lumotlarni kichik xotiralarda saqlash, saqlangan ma'lumotlarni turli maydonlar ta'siridan himoyalangan holda uzatishda, qurilma ichidagi tunnel diodi katta ahamiyatga ega.

Yaqin vaqtgacha ham yarimo'tkazgichli diodlar fizikasi va texnikasiga konsentratsiyasi $10^{16} - 10^{17} \text{ sm}^{-3}$ dan oshmagan kristallar kirar edi. Mos ravishda ulardagi erkin zaryad tashuvchilarning konsentratsiyasi shunday darajada va hatto undan kamroq

edi. Oddiy diodlarda p-n o'tish yetarlicha katta qalinlik va nisbatan kichik maydon kuchlanishi bilan tavsiflanadi. Kuchli legirlangan p-n ulanishli tunnel printsipli birinchi marta kashf etilganda, tunnel diodida eng muhimi yuqori tezlikda tunnel o'tish vaqti edi. Bu shuni anglatadiki, o'tish nol nuqtadan eng yuqori nuqtaga juda qisqa ko'tarilish vaqti bilan sodir bo'lishi mumkin [1-2]. Tunnel diodida differensial qarshiligining hosil bo'lishi, keyinchalik, generatorlarning yaratilishiga turtki bo'ldi. Yuqori chastotali signal ishlab chiqarish yoki tebranishga endi ushbu xarakteristikani qo'llash orqali erishish mumkin edi. Differentsial qarshilik xarakteristikasi, shuningdek, tunnel diodini yuqori chastotali kuchaytiruvchi qurilma sifatida ishlatishga imkon berdi [3]. Yuqori chastotali signalni boshqarish tunnel dio-