

# СПЕКТРАЛ ПАРАМЕТРЛИ ЭЛЛИПТИК ТИПДАГИ ТЕНГЛАМА УЧУН АРАЛАШ ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛА

**Х.Исламов** – катта ўқитувчи

**Р.Карасакалов** – катта ўқитувчи

Термиз давлат педагогика институти

**Таянч сўзлар:** эллиптик тенглама, спектрал параметр, аралаш масала, экстремум принципи, масала ечими.

**Ключевые слова:** эллиптические уравнения, спектральный параметр, смешанные задачи, принцип экстремума, решение задачи.

**Key words:** elliptic equation, spectral parameter, mixed problem, extremum principle, problem solution.

Куйидаги тенгламани қараймиз:

$$y^m u_{xx} + |x|^n u_{yy} - \lambda^2 u = 0, m > n > 0 \quad (1)$$

$$D \quad \text{соҳа} \quad \Gamma_j : \frac{1}{q^2} |x|^{2q} + \frac{1}{p^2} y^{2p} = 1 \quad \text{учлари}$$

$A_j(|h_1|, 0), B(0, h_2)$  нукталарда бўлган  $\Gamma_j$  чизиқ ва координата ўқларининг  $OA_j$  кесмаси  $y=0$  да  $x \geq 0, h_1 > 0 \quad j=1;$  ва  $x \leq 0, h_1 < 0 \quad j=2;$   $\lambda \in (-\infty; +\infty), 2p = m + 2, 2q = n + 2 \quad h_1 = q^{\frac{1}{q}}, h = p^{\frac{1}{p}},$

$$D_1 = D \cap \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$$

$$D_2 = D \cap \{(x, y) : x < 0, y > 0\}$$

$$I_1 = \{(x, y) : 0 < x < h_1, y = 0\},$$

$$I_2 = \{(x, y) : -h_1 < x < 0, y = 0\},$$

$$I_3 = \{(x, y) : 0 < y < h_2, x = 0\},$$

(1) тенгламанинг  $D$  соҳадаги  $u(x, y)$  регуляр ечими деб,  $u(x, y) \in C(\overline{D_j}) \cap C^1(\Gamma_j) \cap C^2(D_j)$  синфга тегишли бўлиб,  $D_j (j=1,2)$  соҳада (1) тенгламани қаноатлантиради ва  $u_x, u_y$  функциялар  $I_i (i=1,2,3)$  интервалнинг четки нукталарида бирдан кичик бўлган  $\frac{1-2\beta}{1-2\alpha}$  тартибли махсусликка айланиш мумкин, бу ерда мос равишда,

$$2\beta = \frac{m}{m+2}, \quad 2\alpha = \frac{n}{n+2} \quad 0 < \alpha < \beta < 0,5 \quad (2)$$

$CN_\lambda^P$  масала.  $D$  соҳада регуляр бўлиб, (1)

тенгламанинг, куйидаги шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг:

$$\left[ \delta_j(s) A_s^j[u] + \rho_j(s) u \right]_{\Gamma_j} = \varphi_j(s), 0 \leq s \leq l \quad (3_j)$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} u(x, y) = p_1(y) \lim_{x \rightarrow -0} u(x, y) + q_1(y), (0, y) \in I_3 \quad (4_1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} u_x(x, y) = p_2(y) \lim_{x \rightarrow -0} u_x(x, y) + q_2(y), (0, y) \in I_3 \quad (4_2)$$

$$a_j(x) u_y(x, 0) + b_j(x) \left( |x|^{2q} \right)^{\frac{1-2\alpha}{2}} \frac{d}{d(|x|^{2q})} \left( |x|^{2q} \right)^{\frac{1-2\beta}{2}} x \quad (5_j)$$

$$x F_{0x} \left[ \alpha + \beta, \frac{2\beta-1}{2} \right] \left( |x|^{2q} \right)^{\frac{2\alpha-1}{2}} u(x, 0) = c_j(x)$$

Бу ерда  $F_{0x} \left[ \begin{matrix} a & b \\ c & x^k \end{matrix} \right]$  бизга маълум бўлган қаср тартибли интегродифференциал оператор [1].

$$F_{0x} \left[ \begin{matrix} a & b \\ c & x^k \end{matrix} \right] f(x) = \frac{1}{\Gamma(c)} \int_0^x f(t) (x^k - t^k)^{c-1} dt$$

$$F(a, b, c; \frac{x^k - t^k}{x^k}) k t^{k-1} dt$$

$$F_{x1} \left[ \begin{matrix} a & b \\ c & x^k \end{matrix} \right] f(x) = \frac{1}{\Gamma(c)} \int_x^1 f(t) (x^k - t^k)^{c-1} F(a, b, c; \frac{x^k - t^k}{x^k}) k t^{k-1} dt, c > 0$$

$$a, b, c; \frac{x^k - t^k}{x^k}) k t^{k-1} dt, c > 0$$

$\delta_j(s), p_j(y), q_j(y), \rho_j(s), \varphi_j(s), a_j(x), b_j(x), c_j(x), (j=1,2)$  лар берилган функциялар, бу функциялар учун куйидаги муносабатлар ўринли бўлсин:

$$\delta_j^2(s) + \rho_j^2(s) \neq 0, \forall s \in [0, l]$$

$$a_j^2(x) + b_j^2(x) \neq 0 \quad \forall (x, 0) \in \overline{I_j} \quad (6_j)$$

$$\delta_j(s), \rho_j(s), \varphi_j(s) \in C[0, l] \quad (7_j)$$

$$p_j(y), q_j(y) \in C(\overline{I_3}) \cup C^2(I_3), a_j(x), b(x), c_j(x) \in C(\overline{I_j}) \cap C^2(I_j) (j=1,2) \quad (8_j)$$

$$A_s^+[u] \equiv y^m \frac{dy}{ds} \frac{\partial u}{\partial x} - x^n \frac{dx}{ds} \frac{\partial u}{\partial y}$$

Масалани ўрганишда  $\delta(s) \neq 0$  деб фараз қиламиз, шу билан бирга  $\Gamma_1, \Gamma_2$  чизиқлар куйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1. Бу чизиқларнинг параметрик тенгламаси  $x = x(s), y = y(s)$

2.  $x(s), y(s)$  функциялар  $[0, l]$  кесмада биринчи тартибли ҳосиллага эга бўлиб бир вақтда нолга тенг бўлмасин, иккинчи тартибли ҳосилалари Гельдер шартини қаноатлантирсин.

3.  $A_j(|h_1|, 0)$  ва  $B(0, h_2)$  нукталар атрофида ушбу шартлар бажарилсин:

$$x^{\frac{n}{2}} \left| \frac{dx}{ds} \right| \leq \text{const} \cdot y^{m+1}, y^{\frac{m}{2}} \left| \frac{dy}{ds} \right| \leq \text{const} \cdot x^{n+1},$$

$$x(0) = y(0) = 0, x(l) = h_1, y(l) = h_2$$

**Теорема 1.** Агар (2) шарт бажарилса ҳамда

$$a_j(x) \geq 0, b_j(x) \leq 0, \forall (x, 0) \in \bar{I}_j \quad (j=1,2) \quad (9_j)$$

$$p_j(y), q_j(y) > 0, \forall y \in \bar{I}_3 \quad \delta_j(s) \rho_j(s) \geq 0 \quad \forall (s \in [0, l]) \quad (10_j)$$

$\delta_j(s)$  ва  $\rho_j(s)$  функциялар  $A_j(|h_1|, 0), B(0, h_2)$

нуқталар атрофида

$$\rho_j(0) \neq 0, \rho_j(l) \neq 0 \text{ бўлиб}$$

$$\left| \delta_j(s) \right| \leq \text{const} [s(l-s)]^{1-\frac{n}{2}}, 0 < n < 0 \quad (11)$$

$$\left| \delta_j(s) \right| \leq \text{const}, \quad n \geq 2 \quad (12)$$

шартлар бажарилса, у ҳолда  $D$  соҳада  $CN_\lambda^P$  масала ягона ечимга эга бўлади.

**Исбот:** Агар (2) ва (8<sub>j</sub>) шартлар бажарилса, у ҳолда  $CN_\lambda^P$  масаланинг  $u(x, y)$  ечими

$$\varphi_1(s) \equiv \varphi_2(s) \equiv 0, c_j(x) = 0 \quad (j=1,2) \quad \text{бўлганда}$$

ўзининг мусбат максимум ва манфий минумига  $\bar{D}$  соҳанинг  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  чегарасида эришади.

Фараз қилайлик мусбат максимумга қандайдир  $A_j(|h_1|, 0), B(0, h_2)$  нуқталардан фарқли  $s_0 \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  нуқтада эришсин. У ҳолда Заремба –Жиро принципа асосан [1]  $A^+s[u] > 0$  ва (3<sub>j</sub>) чегаравий шартдан

$$A_{s_0}^+[u] = -\frac{\rho(s_0)\delta(s_0)}{\delta^2(s_0)} u \quad \text{бу} \quad (10_j) \quad \text{шартга}$$

асосан бажарилмайди. Шунингдек  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  нинг ички нуқталарида ҳам  $u(x, y)$  ўзининг мусбат максимумига эришмайди.

$A_j(|h_1|, 0)$  ва  $B(0, h_2)$  нуқталарда (2), (11) ва (12) шартларга асосан.

$$\lim_{s \rightarrow 0} \delta_j(s) A_s^J[u] = 0 \quad \text{ва} \quad \lim_{l \rightarrow 0} \delta_j(s) A_s^J[u] = 0 \quad (13)$$

бўлади.

Агар мусбат максимум га  $A_j(|h_1|, 0)$  ёки  $B(0, h_2)$  нуқталарда эришса (13) шартга асосан (3<sub>j</sub>) шарт куйиғидаги кўрнишда бўлади

$$\rho_j(0)u(|h_1|, 0) = 0 \quad \text{ёки} \quad \rho_j(l)u(0, h_2) = 0 \quad \text{бўлади}$$

(11) шартни ҳисобга олсак куйидаги ўринли бўлади.

$$u(A) = u(h_1, 0) = 0, u(B) = u(0, h_2) = 0, \quad (14)$$

Демак  $u(x, y)$  функция  $A_j(|h_1|, 0)$  ва  $B(0, h_2)$  нуқталарида мусбат максимумга эришмайди. Шундай

қилиб  $u(x, y)$  мусбат максимумга  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  да эришмайди. Худди шундай мулоҳаза билан манфий минумумга ҳам эришмаслигини кўрсатиш мумкин. Экстремум принципага асосан  $\bar{D}$  соҳада  $u(x, y) = \text{const}$  (14) шартга асосан  $u(x, y) \equiv 0$   $\bar{D}$  эканлиги келиб чиқади. Демак (1) тенглама учун  $CN_\lambda^P$  масала ечими ягона бўлади [2].

**Теорема 2.** Агар (2), (6<sub>j</sub>), (7<sub>j</sub>), (8<sub>j</sub>) шартлар бажарилса  $D$  соҳада  $CN_\lambda^P$  масала ечими мавжуд бўлади.

Масала ечимининг мавжудлигини исботлашда куйидагича ёрдамчи масалани қараймиз.

$N_2C$  масала: (1) тенгламанинг  $D_1$  соҳадаги

$u(x, y) \in C(\bar{D}_1) \cap C^1(\Gamma_1 \cup OA_1 \cup D_1) \cap C^2(D_1)$  синфга

тегишли ва (3<sub>1</sub>) шарт билан бирга

$$u|_{OB} = \tau_1(y) \quad 0 \leq y \leq h_2 \quad (15)$$

$$u|_{OA_1} = v_1(x) \quad 0 < x < h_1 \quad (16)$$

бунда  $x \rightarrow 0$ , ва  $x \rightarrow h_1$   $u(x, y)$  функция  $\frac{1-2\beta}{1-2\alpha}$

тартибли махсусликка айланиш мумкин, бу ерда мос равишда,  $2\beta = \frac{m}{m+2}, 2\alpha = \frac{n}{n+2} \quad 0 < \alpha < \beta < 0,5$

$N_2C$  масала ечими Грин функцияси ёрдамида куйидагича аниқланади:

$$u(x, y) = -\int_0^{h_1} G_2^*(t, 0; x, y) t^n v_1(t) dt + \int_0^{h_2} \frac{\partial G_2^*(0, t; x, y)}{\partial x} t^m \tau_1(t) dt + \int_0^l \frac{\phi(s)}{\delta(s)} G_2^*(\xi(s), \eta(s); x, y) ds \quad (17)$$

бу ерда

$$G_2^*(\xi, \eta; x, y) = G_{02}(\xi, \eta; x, y) + H^*(\xi, \eta; x, y)$$

Грин функцияси бўлиб,

$$G_{02}(\xi, \eta; x, y) = k_2 \xi t x$$

$$\left[ \left( \frac{1}{q} t^q - \frac{1}{q} x^q \right)^2 + \frac{1}{p^2} y^{2p} \right]^{-\beta} \left[ \left( \frac{1}{q} t^q + \frac{1}{q} x^q \right)^2 + \frac{1}{p^2} y^{2p} \right]^{\alpha-1}$$

$$F(1-\alpha-\beta, 1-\alpha; 2-2\alpha; z_1) -$$

$$\left[ \left( 1 - \frac{1}{q^2} t^q x^q \right)^2 + \frac{x^{2q} y^{2q}}{p^2 q^2} \right]^{-\beta} \left[ \left( 1 + \frac{1}{q^2} t^q x^q \right)^2 + \frac{x^{2q} y^{2q}}{p^2 q^2} \right]^{\alpha-1}$$

$$F(1-\alpha-\beta, 1-\alpha; 2-2\alpha; z_1^*)$$

$$z_1 = \frac{\frac{4}{q^2} x^q t^q}{\left( \frac{1}{q} t^q + \frac{1}{q} x^q \right)^2 + \frac{1}{p^2} y^{2p}}, z_1^* = \frac{\frac{4}{q^2} x^q t^q}{\left( 1 + \frac{1}{q^2} x^q t^q \right)^2 + \frac{1}{q^2 p^2} y^{2p}}, [2].$$

$N_1 C$  масала: (1) тенгламанинг  $D_2$  соҳадаги

$$u(x, y) \in C(\overline{D_2}) \cap C^1(\Gamma_2 \cup OA_2 \cup D_2) \cap C^2(D_2)$$

синфга тегишли ва (3<sub>2</sub>) шарт билан бирга

$$u|_{OB} = \tau_2(y) \quad 0 \leq y \leq h_2 \quad (18)$$

$$u_x|_{OA_2} = \nu_2(x) - h_1 < x < 0 \quad (19)$$

бунда  $x \rightarrow 0$ , ва  $x \rightarrow -h_1$   $u(x, y)$  функция  $\frac{1-2\beta}{1-2\alpha}$

тартибли махсусликка айланиш мумкин, бу ерда мос равишда,  $2\beta = \frac{m}{m+2}$ ,  $2\alpha = \frac{n}{n+2}$   $0 < \alpha < \beta < 0,5$

$N_1 C$  масала ечими Грин функцияси ёрдамида қуйидагича аниқланади:

$$\begin{aligned} u(x, y) = & - \int_0^{h_1} G_1^*(t, 0; x, y) t^n \nu_1(t) dt - \\ & - \int_0^{h_2} G_1^*(0, t; x, y) t^m \tau_1(t) dt + \\ & + \int_0^l \frac{\phi_2(s)}{\delta(s)} G_1^*(\xi(s), \eta(s); x, y) ds \end{aligned} \quad (20)$$

бу ерда

$$G_1^*(\xi, \eta; x, y) = G_{01}(\xi, \eta; x, y) + H_1^*(\xi, \eta; x, y)$$

Грин функцияси бўлиб

$$G_{01}(t, 0; x, y) =$$

$$= k_1 \left\{ \left[ \left( \frac{1}{q} t^q - \frac{1}{q} x^q \right)^2 + \frac{1}{p^2} y^{2p} \right]^{-\beta} \left[ \left( \frac{1}{q} t^q + \frac{1}{q} x^q \right)^2 + \frac{1}{p^2} y^{2p} \right]^{-\alpha} X \right\} -$$

$$XF(\alpha - \beta, \alpha; 2\alpha; z_1) -$$

$$\left[ \left( 1 - \frac{1}{q^2} t^q x^q \right)^2 + \frac{x^{2q} y^{2q}}{p^2 q^2} \right]^{-\beta} \left[ \left( 1 + \frac{1}{q^2} t^q x^q \right)^2 + \frac{x^{2q} y^{2q}}{p^2 q^2} \right]^{-\alpha} X$$

$$XF(\alpha - \beta, \alpha; 2 - 2\alpha; z_1^*)$$

$$G_{01}(0, t; x, y) =$$

$$= k_1 \left\{ \left[ \left( \frac{1}{p} y^p - \frac{1}{p} t^p \right)^2 + \frac{1}{q^2} x^{2q} \right]^{-\beta} \left[ \left( \frac{1}{p} y^p + \frac{1}{p} t^p \right)^2 + \frac{1}{q^2} x^{2q} \right]^{-\alpha} X \right\} -$$

$$XF(\beta - \alpha, \beta; 2\beta; z_2) -$$

$$\left[ \left( 1 - \frac{1}{p^2} t^p y^p \right)^2 + \frac{x^{2q} y^{2q}}{p^2 q^2} \right]^{-\beta} \left[ \left( 1 + \frac{1}{p^2} t^p y^p \right)^2 + \frac{x^{2q} y^{2q}}{p^2 q^2} \right]^{-\alpha} X^{-\alpha}$$

$$XF(\beta - \alpha, \beta; 2\beta; z_2^*)$$

бунда

$$z_2 = \frac{\frac{4}{p^2} y^p t^p}{\left( \frac{1}{p} t^p + \frac{1}{p} y^p \right)^2 + \frac{1}{q^2} x^{2q}}, z_2^* = \frac{\frac{4}{p^2} y^p t^p}{\left( 1 + \frac{1}{p^2} y^p t^p \right)^2 + \frac{1}{q^2 p^2} x^{2q} y^{2p}}, [2]$$

Бу топишган ечимларни  $x=0$  да ўзаро тенглаштириб ва масалада берилган шартлардан фойдаланиб  $\nu_1(x)$  ва  $\nu_2(x)$  ларга нисбатан интеграл тенглама ҳосил қиламиз.  $D_j$  ( $j=1,2$ ) соҳаларда ва бузилиш чизиқлари  $I_i$  ( $i=1,2,3$ ) да (4<sub>1</sub>) ва (4<sub>2</sub>) ларни ҳисобга олиб  $CN_{\lambda}^p$  масала унга эквивалент бўлган Фредгольмнинг иккинчи тур интеграл тенгламасига келтирилади. Бу тенглама ечими мавжудлиги тенглама ечими ягоналигидан келиб чиқади.

#### Адабиётлар

1. Салоҳитдинов М.С., Исломов Б. Уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. – Ташкент: «Mumtoz soʻz», 2009. –С. 264.

2. Салоҳитдинов М.С., Исломов Б. Задачи Дирихле для уравнения эллиптического типа с негладкой линией и различным порядком вырождения внутри области. В.кн.: Дифференциальные уравнения математической физики и их приложения. -Ташкент: «Фан».1989. –С. 11-24.

**РЕЗЮМЕ.** Мақолада спектрал параметрли эллиптик типдаги тенглама учун аралаш чегаравий масаланинг ечими ягоналиги экстремум принципи ёрдамида исботланган ҳамда масала ечими мавжудлиги ҳақидаги теорема келтирилган.

**РЕЗЮМЕ.** В статье с использованием принципа экстремума доказывается единственность решения смешанной краевой задачи для уравнения эллиптического типа со спектральными параметрами и приводится теорема существования решения задачи.

**SUMMARY.** Using the extremum principle, the article proves the uniqueness of a solution to a mixed boundary value problem for an elliptic-type equation with spectral parameters and provides an existence theorem for a solution to the issue.