

УДК 532.5

KUCHSIZ YAQINLASHISH USULIDAN FOYDALANIB BYURGERS TIPIDAGI BIR O'LCHOVLI TENGLAMALAR SISTEMASI YECHIMINING MAVJUDLIGI VA YAGONALIGINI ISBOTLASH

Z.U.Uzoqov – fizika-matematika fanlari nomzodi, professor

Muhammad al-Xorazmiy nomidagi Toshkent axborot texnologiyalari universiteti Qarshi filiali

U.Q.Turdiyev – fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori

Axborot texnologiyalari menejment universiteti

Tayanch so'zlar: ikki tezlikli gidrodinamika, Byurgers tipidagi tizim, zaif approksimatsiya usuli.

Ключевые слова: двухскоростная гидродинамика, система типа Бюргерса, метод слабой аппроксимации.

Key words: two-velocity hydrodynamics, Byurgers type system, weak approximation method.

1. KIRISH. Jahon miqyosida olib borilayotgan ko'plab ilmiy-amaliy tadqiqotlar, aksariyat hollarda, metrologiya va okeanologiya sohalarida ko'p fazali siqiluvchan muhitlar uchun dinamik jarayonlarni modellashtirish, shuningdek, mantiya jinslaridagi konvektiv massa almashinishi, filtratsion oqimlar va turli geologik jarayonlarning matematik modellari uchun sonli-analitik usullarni yaratish masalalariga keltiriladi. Fazalararo intensiv massa almashinuvi kuzatiladigan neft va gaz konlarini ishga tushirish va ulardan foydalanish jarayonida tabiiy qatlamlardagi flyuidlar oqimini hisoblashda ko'p fazali muhitlar modelini yechish, matematik modellashtirish va hisoblash matematikasi sohalarida bo'yicha olib borilayotgan tadqiqotlarning obyekti hisoblanadi. Shu sababli, ikki tezlikli gidrodinamikada yuzaga keladigan bir o'lchovli Byurgers tipidagi tenglamalar sistemasi uchun Koshi va chegaraviy masalalarni sonli yechish sxemalari hamda algoritmlarni qurish, dasturiy vositalar majmuyini yaratish amaliy matematikaning muhim vazifalaridan biri bo'lib qolmoqda.

Ko'p fazali oqimlarni modellashtirish va aralash elliptik-giperbolik tipdagi tenglamalar sistemasi uchun boshlang'ich-chegaraviy masalalarni keng tadqiq etishda boshlang'ich-chegaraviy shartlarning nokorrekt qo'yilishi bilan bog'liq bo'lgan qiyinchiliklarni bartaraf etish uchun o'zgarma bosimli modelning turli giperbolik ko'rinishdagi matematik modellarini tuzish va ularni sonli usullar yordamida yechishga qaratilgan ilmiy tadqiqotlar olib borilmoqda.

Ushbu yo'nalishda, jumladan Byurgers tipidagi tenglamalar va ularning sistemasi orqali ifodalanuvchi modellar metrologiya, okeanologiya neft va gaz sohalarida keng qo'llash bo'yicha tadqiqotlar ustuvor hisoblanmoqda. Shu bilan birga, o'zgarma bosimga ega bo'lgan qo'shsuyuqlik muhitda noxiziq to'liqlar tarqalishining matematik modelini takomillashtirish, ikki tezlikli gidrodinamikada yuzaga keladigan Byurgers tipidagi bir o'lchovli tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini yechish dolzarb vazifalardan hisoblanadi. [1:105], [8:153].

2. Byurgers tipidagi tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasi.

Bir o'lchamli holatda ushbu sistema quyidagi ko'rinishga ega

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \eta_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b \frac{\rho_2}{\rho_1} (u - v) + F, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \eta_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b(u - v) + F, \quad (2)$$

(1) va (2) formulalarda b -fazalararo ishqalanish koeffitsiyenti, g -ovak muhitlar uchun Darsi koeffitsiyentining analogi hisoblanadi.

(1), (2) Byurgers tipidagi tenglamalar sistemasi uchun ta'sir etuvchi kuchlarni hisobga olmagan holda ($F(t, x) = 0$) $\Pi_{[0,T]} = \{(t, x): 0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^1\}$ sohada quyidagi boshlang'ich shartlarga ega Koshi masalasini ko'rib chiqamiz.

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad v|_{t=0} = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^1. \quad (3)$$

Bizni (1), (2) Byurgers tipidagi tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasining $u(t, x), v(t, x) \in C^{1,2}(\Pi_{[0,T]})$

xossalarga ega bo'lgan yechimlari qiziqtiradi - bir marta t bo'yicha va ikki marta x bo'yicha uzluksiz differensiallanuvchi funksialar sinfi. Kuchsiz approksimatsiya usuli bilan Byurgers tipidagi bir o'lchovli tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligi isbotlangan [2:39], [3:56].

3. Byurger tipidagi tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini kuchsiz yaqinlashish usuli.

(1), (2), (3) masalaning $u_0(x), v_0(x)$ Koshi masalalariga to'xtalamiz. Faraz qilaylik, $u_0(x), v_0(x) \in C^2(\mathbb{R}^1)$ va

$$\left| \frac{d^n u_0(x)}{dx^n} \right| \leq c_n, \quad \left| \frac{d^n v_0(x)}{dx^n} \right| \leq \tilde{c}_n, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad n = 0, 1, 2, \quad (4)$$

bu yerda $c_n, \tilde{c}_n$ - biror berilgan manfiy bo'lmagan o'zgarma.

Avval, Koshi masalalari cheksiz differensiallanuvchi bo'lgan holini ko'rib chiqamiz. Faraz qilamizki, $u_0(x), v_0(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ va

$$\left| \frac{d^n u_0(x)}{dx^n} \right| \leq c_n, \quad \left| \frac{d^n v_0(x)}{dx^n} \right| \leq \tilde{c}_n, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5)$$

Kuchsiz approksimatsiya usuliga ko'ra, (1), (2), (3) Koshi masalasini quyidagi masala bilan approksimatsiyalaymiz:

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} = 3\eta_1 u_{xx}^\tau, \quad \frac{\partial v^\tau}{\partial t} = 3\eta_2 v_{xx}^\tau, \quad n\tau < t \leq \left(n + \frac{1}{3}\right)\tau, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} + 3u^\tau u_x^\tau = 0, \quad \frac{\partial v^\tau}{\partial t} + 3v^\tau v_x^\tau = 0, \quad \left(n + \frac{1}{3}\right)\tau < t \leq \left(n + \frac{2}{3}\right)\tau, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} = -3\tilde{b}(u^\tau - v^\tau), \quad \frac{\partial v^\tau}{\partial t} = 3b(u^\tau - v^\tau), \quad \left(n + \frac{2}{3}\right)\tau < t \leq (n+1)\tau, \quad (8)$$

$$u^\tau(0, x) = u_0(x), \quad v^\tau(0, x) = v_0(x), \quad (9)$$

bu yerda $\tilde{b} = \frac{\rho_2}{\rho_1} b$, $N\tau = t^*$, $N > 1$ - butun son,

$n = 0, 1, \dots, N-1$, va t^* doimiy (10) tengsizlikni qanoatlantiradi (quyida keltirilgan).

Izoh 1.: (6)-(9) masala yechimini tuzishda birinchi kasr qadamlarda issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun Koshi masalasi yechiladi, ikkinchi kasr qadamlarda - ko'chish tenglamasi uchun Koshi masalasi, uchinchi kasr qadamlarda esa - oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasi yechiladi. Masalaning yechimi quyidagi ko'rinishga ega:

$$u^\tau = u_0(x) + \frac{3\tilde{b}}{b}(v_0(x) - u_0(x))(1 - e^{-\tilde{b}t}),$$

$$v^\tau = v_0(x)e^{-\tilde{b}t} + \frac{3\tilde{b}}{b}v_0(x)(1 - e^{-\tilde{b}t}) + \frac{3\tilde{b}}{b}u_0(x)(1 - e^{-\tilde{b}t}),$$

bu yerda $\tilde{b} = 3(b + \tilde{b})$.

(5) munosabatlar bajarilgan bo'lsin va C_1 , $\tilde{C}_1$ va t^* doimiylar quyidagi shartlarni qanoatlantirsin

$$1 - c_1 t^* > 0, \quad 1 - \tilde{c}_1 t^* > 0 \quad (10)$$

U holda $\Pi_{[0, t^*]}$ sohada u^τ va v^τ yechim mavjud va t , X o'zgaruvchilar bo'yicha o'zining barcha hosilalari bilan chegaralangan. Aniqki, ixtiyoriy fiksirlangan τ da (6)-(9) masalaning u^τ va v^τ yechimi τ kattalikka bog'liq bo'lmagan xolda chegaralangan.

$$|u^\tau(t, x)| \leq c_0, \quad |v^\tau(t, x)| \leq \tilde{c}_0. \quad (11)$$

Yuqorida keltirilgan mulohazalarni takrorlab, u^τ va v^τ yechimlarning x bo'yicha ixtiyoriy tartibli xususiy hosilalari τ bo'yicha chegaralanganligini ko'rsatish mumkin:

$$\left| \frac{\partial^k u^\tau(t, x)}{\partial x^k} \right| \leq C_k, \quad \left| \frac{\partial^k v^\tau(t, x)}{\partial x^k} \right| \leq \tilde{C}_k, \quad (t, x) \in \Pi_{[0, \tau]},$$

$$k = 0, 1, \dots \quad (12)$$

bu yerda C_k , $\tilde{C}_k$ - biror musbat o'zgarmaslar bo'lib, $C_k \leq c_k$, $\tilde{C}_k \leq \tilde{c}_k$.

(11), (12) tengsizliklar va (6)-(9) tenglamalardan τ bo'yicha tekis baholashlar kelib chiqadi:

$$\left| \frac{\partial^{k+1} u^\tau(t, x)}{\partial t \partial x^k} \right| \leq c_k, \quad \left| \frac{\partial^{k+1} v^\tau(t, x)}{\partial t \partial x^k} \right| \leq \tilde{c}_k, \quad (t, x) \in \Pi_{[0, \tau]},$$

$$k = 0, 1, \dots \quad (13)$$

Bu baholashlardan u^τ , v^τ va ularning X bo'yicha ixtiyoriy tartibli hosilalari $\Pi_{[0, \tau]}$ da tekis chegaralangan va

tekis darajada uzluksiz ekanligi kelib chiqadi.

Arsela teoremasiga asosan, diagonal usuli bilan $\{u^\tau\}$, $\{v^\tau\}$ ketma-ketlikning $\Pi_{[0, \tau]}$ sohaning har bir chegaralangan qism sohasida o'zining x bo'yicha barcha hosilalari bilan mos ravishda u va v funksiyalarga tekis yaqinlashuvchi $\{u^{\tau_k}\}$, $\{v^{\tau_k}\}$ qism ketma-ketliklarini tanlab olish mumkin, buning natijada u va v funksiyalar x bo'yicha ixtiyoriy

tartibli hosilaga ega bo'ladi va quyidagi munosabatlar bajariladi:

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad v|_{t=0} = v_0(x), \quad (14)$$

$$\left| \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial x^k} \right| \leq C_k, \quad \left| \frac{\partial^k v(t, x)}{\partial x^k} \right| \leq \tilde{C}_k, \quad (t, x) \in \Pi_{[0, \tau]},$$

$$k = 0, 1, \dots \quad (15)$$

Yechimning yagonaligi standart usul bilan isbotlanadi.

Natijada, u^τ, v^τ funksiyalar ketma-ketliklarining o'zi ham $\tau \rightarrow 0$ da o'zining barcha hosilalari bilan $\Pi_{[0, \tau]}$ da

mos ravishda u va v ga tekis yaqinlashadi.

$u_0(x), v_0(x) \in C^2(\square^1)$ bo'lgan hol o'rtacha funksiyalar yordamida isbotlanadi. Shunday qilib, quyidagi teorema isbotlangan.

Teorema 1. $u_0(x), v_0(x)$ - funksiyalar (3.3) shartni qanoatlantirsin. U holda (6)-(9) masalaning $u^\tau(t, x)$ va $v^\tau(t, x)$ yechimi $\Pi_{[0, \tau]}$ sohada $\tau \rightarrow 0$ da (1), (2), (3) masalaning $u^\tau(t, x)$ va $v^\tau(t, x)$ yechimiga tekis yaqinlashadi. $\frac{\partial^k u(t, x)}{\partial x^k}, \frac{\partial^k v(t, x)}{\partial x^k}, k = 0, 1, \dots$ hosilalar $\Pi_{[0, \tau]}$ sohada $u(t, x)$ va $v(t, x)$ ning tegishli hosilalariga tekis yaqinlashadi.

Burgers tipidagi sistema qo'sh suyuqlikli muhit modelining tenglamalar sistemasini soddalashtirilgan ko'rinishi bo'lib, bosim o'zgarmasligi va siqilmaslik shartining yo'qligi bilan qo'sh suyuqlikli muhit modelining tenglamalar sistemasidan farq qiladi. Shu sababli, Burgers tipidagi sistema uchun masalalar to'plami ba'zan o'zgarmas bosimga ega bo'lgan ikki tezlikli suyuqlik dinamikasi deb ataladi.

Ikki tezlikli gidrodinamikada yuzaga keladigan Burgers tipidagi tenglamalarning bir o'lchovli sistema uchun Koshi masalasi ko'rib chiqildi. Kuchsiz yaqinlashish usulidan foydalanib, Burgers tipidagi bir o'lchovli sistema uchun Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagona ekanligi isbotlangan. Riman tipidagi tenglamalar sistemasining harakatlanuvchi to'lqinlar ko'rinishidagi yechimi ko'rib chiqildi [4:10], [5:20], [6:5], [7:153], [9:11].

Adabiyotlar

- Куликовский А.Г., Свешников Е.И., Чугайнова А.П. Математические методы изучения разрывных решений нелинейных гиперболических систем уравнений. –Москва: 2010. –С. 37-45.
- Доровский В.Н. Континуальная теория фильтрации. // Геология и геофизика. 1989. № 7. –С. 39-45.
- Доровский В.Н., Перепечко Ю.В. Теория частичного плавления. // Геология и геофизика. 1989. № 9. –С.56-64.
- Гегечкори З.Г., Демидов Г.В. О сходимости метода слабой аппроксимации. // ДАН Россия, 1973, т. 213, № 2, –С. 264-266.
- Белов Ю.Я., Демидов Г.В. Решение задачи Коши для системы уравнений типа Хопфа методом слабой аппроксимации. // Численные методы механики сплошной среды. - Новосибирск: ВЦ СО АН Россия, 1970. Т.1, № 2. - С. 3-16.
- Имомназаров Х.Х., Турдиев У.К. Исследование задачи Коши для одномерной системы уравнений типа Бюргерса методом слабой аппроксимации//Проблемы информатики. № 3 (44)/2019. –С. 20-30. (05.00.00, № 67)
- Turdiv U., Imomnazarov Kh. A system of equations of the two-velocity hydrodynamics without pressure // AIP Conference Proceedings. 2021. –P. 070002-1–070002-5. (3, Scopus IF=0.4)
- Турдиев У.К. Задача Коши для одномерной системы уравнений типа Бюргерса. // Мухаммад Ал-Хоразмий авлодлари. № 4 (18)/2021. –С. 153-157. (05.00.00, №10).
- Imomnazarov B.K., Turdiv U.K., Erkinova, D.A. Weak approximation method for the 3D Cauchy problem for a one-dimensional system of hopf-type equations mathematical notes of nefuthis link is disabled // Mathematical Notes of NEFU. 29(4)/ 2022. –P. 11–20. (3, Scopus IF=0.167).

РЕЗЮМЕ. Ikki tezlikli gidrodinamikada paydo bo'lgan Burgers tipidagi bir o'lchovli tenglamalar tizimi uchun Koshi masalasi ko'rib chiqildi. Bir o'lchovli Burgers tipidagi tizim uchun Koshi masalasini yechimining mavjudligi va o'ziga xosligi zaif approksimatsiya usuli bilan isbotlangan.

РЕЗЮМЕ. Рассмотрена задача Коши для одномерной системы уравнений типа Бюргерса возникающая в двухскоростной гидродинамике. Методом слабой аппроксимации доказано существование и единственность решения задачи Коши для одномерной системы типа Бюргерса.

SUMMARY. The Koshi problem for a one-dimensional system of Byurgers type equations arising in two-velocity hydrodynamics is considered. By the method of weak approximation, the existence and uniqueness of the solution of the Koshi problem for a one-dimensional Byurgers type system is proved.