

Адабиётлар

1. Uzokov G'.N., .Safarov A.B. Mathematical modeling of solar photoelectric batteries in matlab/simulink system. International bulletin of applied science and technology <https://doi.org/10.5281/zenodo.8347989>. -P. 80-88.

2. Одамов У.О., Комилов М.М., Ниязов Ш.К., Кутлимратов А. Анализ деградации и изменения производительности солнечной фотоэлектрической станции Пап-Наманган. Международный журнал Гелиотехника. –Ташкент: 2023. ISSN 0130-0997 Том 59, № 3-4, -С. 218-232.

3. Одамов У.О., Комилов М.М. Регрессионный и корреляционный анализ внешних факторов, влияющих на производительность солнечной фотоэлектрической электростанции. Наука, инновации, образование: актуальные вопросы XXI века Научной электронной библиотекой Elibrary.ru №1096-0430 августа 2023 г.-С.63-69. МК-1792.

4. Berghold, J., et al., 2010. Potential Induced Degradation of solar cells and panels. In: 25th EUPVSEC, pp. 3753–3759. Berman, D., Faiman, D., 2007. EVA browning and the time-dependence of I–V curve parameters on PV modules with and without mirror-enhancement in a desert environment. Solar Energy Materials & Solar Cells 45 (4). -P. 401-412.

5. Carlson D.E., Romerol R., Willing F., Meakin, D., Gonzalez L., Murphyl R., Moutinho H.R., Al-Jassim. -M.: 2003. Corrosion effects in thin-film photovoltaic modules. Progress Photovoltaics: Research and Applications 11. -P. 377-386. <http://dx.doi.org/10.1002/ppp.500>

6. Odamov U.O., Komilov M.M., Niyazov Sh.K. The efficiency of the solar battery operations in real exploitation conditions. AIPConference Proceedings 2686,020006 (2022) <https://doi.org/10.1063/5.0113482> Dec 5.

РЕЗЮМЕ. Ушбу мақолада қуёш фотоэлектрстанциянинг мавсумий электр энергия ишлаб чиқаришга таъсири қўрсатувчи таъки омиллар ўрганилган.

РЕЗЮМЕ. В данной статье рассматриваются внешние факторы, влияющие на сезонное производство электроэнергии солнечной фотоэлектрической электростанцией.

SUMMARY. The article examines the influence of external factors influencing the seasonal electricity production of the solar photovoltaic power plant.

УДК 517.95

ЗАДАЧА С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ВТОРОГО РОДА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИКО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Г.К.Кылышбаева – докторант

Национальный университет Узбекистана имени М.Улугбека

Таянч сўзлар: учинчи тартибли тенглама, Дирихле типидagi масала, кичик махражлар, ечимнинг ягоналиги, мавжудлиги ва турғунлиги.

Ключевые слова: уравнение третьего порядка, задача типа Дирихле, малые знаменатели, единственность, существование и устойчивость решения.

Key words: third order equation, Dirichlet-type problem, small denominators, uniqueness, existence and stability of the solution.

1. Введение. Корректные краевые задачи для уравнений эллиптического-гиперболического и параболического типов третьего порядка, в первые изучены в работах А.В. Бицадзе и М.С.Салохитдинова [1], М.С.Салохитдинова [2], Т.Д.Джураева [4], Т.Д.Джураева, А.Сопуева и М. Мамажонова [5], где смешанная область, состоящая из характеристических треугольников и прямоугольника (или полукруга).

В этих работах решение найдено в классе функций, представимых в виде $u(x, y) = v(x, y) + \omega(x)$ или $u(x, y) = v(x, y) + \omega(y)$, где $v(x, y)$ – произвольное регулярное решение уравнения второго порядка $Lv = 0$, $\omega(x)$, $\omega(y)$ – произвольные функции из класса $C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$. Такое представление имеет важное место для уравнений, составляемых из произведения перестановочных дифференциальных операторов. Но для уравнения смешанного типа с обобщенным оператором, содержащим в себе младшие члены, этот метод не всегда верен [8].

В последние годы возник интерес исследованию методом спектрального анализа [7], [12] однозначной разрешимости и устойчивости решения прямых и обратных задач для модельного уравнения второго порядка смешанного параболического-гиперболического и эллиптического-гиперболического типов в прямоугольной области изучены в работах [3], [10], [11], [13], а в работах [12], [18] таких задачи исследуются для уравнения смешанного типа третьего порядка. Прямые краевые задачи для смешанных уравнений второго порядка с оператором дробного дифференцирования в смысле Капуто, исследованы в работах [14], [16], [17].

В настоящей работе следуя работы [3], [9] изучается краевые задачи для уравнения эллиптического-гиперболического типа с граничным условием второго рода в прямоугольной области. Такого типа задачи

ранее изучались в работах [5, гл.4, стр. 126-159], в случае, когда гиперболическая часть представляет собой треугольник, ограниченный характеристиками уравнения, а параболическая часть состоит из прямоугольной области.

2. Постановка задачи. В прямоугольной области $D = \{(x, y): 0 < x < 1, -p < y < q\}$, рассмотрим уравнение смешанного типа

$$0 = \left(a \frac{\partial}{\partial x} + c \right) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} - \lambda^2 u, & x > 0, y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} - \lambda^2 u, & x > 0, y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $\lambda, p > 0, q > 0$ – действительные числа,

$a \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty), c \in (-\infty, +\infty)$.

Введем обозначения: $AB \equiv J = \{(x, y): 0 < x < 1, y = 0\}$,

$AA_0: x = 0, 0 < y < q$,

$BB_0: x = 1, 0 < y < q$,

$D_1 = D \cap \{(x, y): x > 0, y > 0\}$,

$D_2 = D \cap \{(x, y): x > 0, y < 0\}$,

$D = D_1 \cup D_2 \cup J$.

Через $C_{\xi, \eta}^{k, m}(M)$ обозначим класс функций, непрерывных вместе со своими частными производными по $\xi(\eta)$ до $k(m)$ -го порядка включительно в области M . В области D для уравнения (1) исследуем следующую задачу.

Задача С. Найти в области D функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\begin{aligned} u(x, y) &\in C^1(\bar{D}), \\ u &\in C_{x, y}^{3, 2}(D_1 \cup D_2) \cap C_x^2(D \cup AA_0 \cup BB_0), \\ u_{xyy} &\in C(D_1 \cup D_2), \end{aligned} \quad (2)$$

$$0 = \left(a \frac{\partial}{\partial x} + c \right) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} - \lambda^2 u, & (x, y) \in D_1, \\ u_{xx} - u_{yy} - \lambda^2 u, & (x, y) \in D_2, \end{cases} \quad (3)$$

$$(au_{xx}(x, y) + cu_x(x, y))|_{x=0} = 0, \quad (4)$$

$$(au_{xx}(x, y) + cu_x(x, y))|_{x=1} = 0, \quad -p \leq y \leq q, \quad (5)$$

$$u(x, q) = g(x), \quad u(x, -p) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (6)$$

где $\varphi(y)$, $\psi(x)$, $g(x)$ – заданные достаточно гладкие функции.

3. Построение решения задачи. Поскольку

$$\left(a \frac{\partial}{\partial x} + c \right) Lu = L \left(a \frac{\partial u}{\partial x} + cu \right) = 0, \quad (x, y) \in D_1 \cup D_2,$$

тогда мы можем ввести новую функцию $v(x, y) = a \frac{\partial u}{\partial x} + cu$, для которой получаем уравнение

$$0 = Lv \equiv \begin{cases} L_1 v \equiv v_{xx} + v_{yy} - \lambda^2 v, & (x, y) \in D_1, \\ L_2 v \equiv v_{xx} - v_{yy} - \lambda^2 v, & (x, y) \in D_2. \end{cases} \quad (7)$$

Из граничных условий (4) следует, что

$$\begin{aligned} v_x(0, y) &= au_{xx}(0, y) + cu_x(0, y) = \\ &= 0, \quad v_x(1, y) = au_{xx}(1, y) + cu_x(1, y) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Из условия (6) найдем

$$v(x, q) = au_x(x, q) + cu(x, q) = \quad (9)$$

$$= ag'(x) + cg(x) = g_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$v(x, -p) = au_x(x, -p) + cu(x, -p) = \quad (10)$$

$$= a\psi'(x) + c\psi(x) = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Частные решения уравнения (7), не равные нулю в области D и удовлетворяющие нулевое граничное условие (8), будем искать в виде

$$v(x, y) = X(x)Y(y) \quad (11)$$

Подставляя (11) в (7) и (8) получаем

$$Y''(y) - \lambda^2 Y(y) = 0, \quad 0 < y < q, \quad (12)$$

$$Y''(y) + \lambda^2 Y(y) = 0, \quad -p < y < 0, \quad (13)$$

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (14)$$

$$X'(0) = 0, \quad X'(1) = 0. \quad (15)$$

Как нам известно, что спектральная задача (14) и (15) имеет решение

$$X_0(x) = 1, \quad X_n(x) = \sqrt{2} \cos \mu_n x, \quad \mu_n = \pi n, \quad n \in N. \quad (16)$$

Тогда дифференциальные уравнения (12) и (13) имеют решения

$$Y_n(y) = \begin{cases} \alpha_n e^{-\rho_n y} + \beta_n e^{\rho_n y}, & 0 < y < q, \\ \gamma_n \cos \rho_n y + \theta_n \sin \rho_n y, & -p < y < 0, \end{cases} \quad (17)$$

$$Y_0(y) = \begin{cases} \alpha_0 e^{-\lambda y} + \beta_0 e^{\lambda y}, & 0 < y < q, \\ \gamma_0 \cos \lambda y + \theta_0 \sin \lambda y, & -p < y < 0, \end{cases} \quad (18)$$

где $\rho_n = \sqrt{\mu_n^2 + \lambda^2}$, $n \in N_0 = N \cup \{0\}$, α_n , β_n , γ_n и θ_n ($n \in N_0$) – произвольные постоянные.

Далее подставляя (16), (17) и (18) в (11) получим

$$v_n(x, y) = \begin{cases} \left(\alpha_n e^{-\rho_n y} + \beta_n e^{\rho_n y} \right) X_n(x), & 0 < y < q, \quad n \in N, \\ \left(\gamma_n \cos \rho_n y + \theta_n \sin \rho_n y \right) X_n(x), & -p < y < 0, \end{cases} \quad (19)$$

$$v_0(x, y) = \begin{cases} \alpha_0 e^{-\lambda y} + \beta_0 e^{\lambda y}, & 0 < y < q, \\ \gamma_0 \cos \lambda y + \theta_0 \sin \lambda y, & -p < y < 0. \end{cases} \quad (20)$$

Тогда функции (19) и (20) по построению удовлетворяют в областях D_j ($j=1,2$) уравнению (7) и нулевым граничным условиям (8) при любых α_n , β_n , γ_n и θ_n ($n \in N_0$). Следовательно, в силу линейности и однородности уравнения (7) сумма частных решений

$$v(x, y) = \begin{cases} \alpha_0 e^{-\lambda y} + \beta_0 e^{\lambda y} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\alpha_n e^{-\rho_n y} + \beta_n e^{\rho_n y} \right) X_n(x), & 0 < y < q, \\ \gamma_0 \cos \lambda y + \theta_0 \sin \lambda y + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\gamma_n \cos \rho_n y + \theta_n \sin \rho_n y \right) X_n(x), & -p < y < 0, \end{cases} \quad (21)$$

также удовлетворяет уравнению (7) и граничным условиям (8).

Решая уравнения $a \frac{\partial u}{\partial x} + cu = v(x, y)$ с учетом условия

$$(5), \text{ найдем искомую функцию} \quad u(x, y) = e^{-\frac{c}{a}x} \left[\varphi(y) + \frac{1}{a} \int_0^x v(t, y) e^{\frac{c}{a}t} dt \right]. \quad (22)$$

В силу (21) из (22) имеем

$$u(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{c}{a}x} \left[\varphi(y) + \frac{1}{a} \int_0^x \left\{ \alpha_0 e^{-\lambda y} + \beta_0 e^{\lambda y} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\alpha_n e^{-\rho_n y} + \beta_n e^{\rho_n y} \right) X_n(t) \right\} e^{\frac{c}{a}t} dt \right], & 0 < y < q, \\ e^{-\frac{c}{a}x} \left[\varphi(y) + \frac{1}{a} \int_0^x \left\{ \gamma_0 \cos \lambda y + \theta_0 \sin \lambda y + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\gamma_n \cos \rho_n y + \theta_n \sin \rho_n y \right) X_n(t) \right\} e^{\frac{c}{a}t} dt \right], & -p < y < 0. \end{cases} \quad (23)$$

Теперь находим коэффициенты α_0 , β_0 , γ_0 , θ_0 ,

α_n , β_n , γ_n и θ_n . В силу (2) с учетом

$$u(x, +0) = u(x, -0), \quad (x, 0) \in \bar{J},$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow -0} u_y(x, y), \quad (x, 0) \in J$$

из (23) получим

$$\alpha_0 = \frac{\gamma_0 - \theta_0}{2}, \quad \beta_0 = \frac{\gamma_0 + \theta_0}{2}, \quad (24)$$

$$\alpha_n = \frac{\gamma_n - \theta_n}{2}, \quad \beta_n = \frac{\gamma_n + \theta_n}{2}, \quad n \in N. \quad (25)$$

Воспользуемся условием (9), (10) из (23) с учетом (24) и (25) находим

$$\begin{aligned} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} + cu \right) \Big|_{y=q} &= \gamma_0 \cosh \lambda q + \theta_0 \sinh \lambda q + \\ &+ \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} [\gamma_n \cosh \rho_n q + \theta_n \sinh \rho_n q] \cos \mu_n x = \\ &= g_0 + g_1(x) = g_{10} + \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} g_{1n} \cos \mu_n x, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} + cu \right) \Big|_{y=-p} &= \gamma_0 \cos \lambda p - \theta_0 \sin \lambda p + \\ &+ \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} [\gamma_n \cos \rho_n p - \theta_n \sin \rho_n p] \cos \mu_n x = \\ &= \psi_0 + \psi_1(x) = \psi_{10} + \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{1n} \cos \mu_n x, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$g_{10} = \int_0^1 g_1(x) dx, \quad g_{1n} = \sqrt{2} \int_0^1 g_1(x) \cos \mu_n x dx. \quad (28)$$

$$\psi_{10} = \int_0^1 \psi_1(x) dx, \quad \psi_{1n} = \sqrt{2} \int_0^1 \psi_1(x) \cos \mu_n x dx. \quad (29)$$

Удовлетворив функции (23) граничным условиям (9) и (10) получим систему относительно неизвестных γ_n , θ_n и γ_0 , θ_0 :

$$\begin{cases} \gamma_n \operatorname{ch} \rho_n q + \theta_n \operatorname{sh} \rho_n q = g_{1n}, \\ \gamma_n \cos \rho_n p - \theta_n \sin \rho_n p = \psi_{1n}, \end{cases}$$

Если определитель системы (30)

$$\begin{aligned} \Delta_n(p, q) &= \operatorname{ch} \rho_n q \sin \rho_n p + \\ &+ \operatorname{sh} \rho_n q \cos \rho_n p \neq 0, \quad n \in N_0 = N \cup \{0\} \end{aligned} \quad (31)$$

то она имеет единственное решение

$$\gamma_n = \frac{1}{\Delta_n(p, q)} [g_{1n} \sin \rho_n p + \psi_{1n} \operatorname{sh} \rho_n q], \quad (32)$$

$$\theta_n = \frac{1}{\Delta_n(p, q)} [g_{1n} \cos \rho_n p - \psi_{1n} \operatorname{ch} \rho_n q].$$

Теперь, найденные γ_0 , θ_0 и γ_n , θ_n подставим в (23). В результате найдем окончательный вид функций

$$u(x, y) = \begin{cases} \varphi(y) e^{\frac{c}{a}x} + \left(1 - e^{\frac{c}{a}x} \right) \frac{[g_{10} \Delta_0(p, y) + \psi_{10} \operatorname{sh} \lambda(q-y)]}{c \Delta_0(p, q)} + \\ + \frac{\sqrt{2}}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_n(p, q)} [g_{1n} \Delta_n(p, y) + \psi_{1n} \operatorname{sh} \lambda_n(q-y)] \int_0^x e^{\frac{c}{a}t} \cos \rho_n t dt, & y > 0, \\ \varphi(y) e^{\frac{c}{a}x} + \left(1 - e^{\frac{c}{a}x} \right) \frac{[g_{10} \sin \lambda(p+y) + \psi_{10} \Delta_0(-y, q)]}{c \Delta_0(p, q)} + \\ + \frac{\sqrt{2}}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_n(p, q)} [g_{1n} \sin \rho_n(p+y) + \psi_{1n} \Delta_n(-y, q)] \int_0^x e^{\frac{c}{a}t} \cos \rho_n t dt, & y < 0. \end{cases} \quad (33)$$

$$\Delta_n(p, y) = \operatorname{ch} \rho_n y \sin \rho_n p +$$

$$\text{где } + \operatorname{sh} \rho_n y \cos \rho_n p, \quad 0 < y < q, \quad (34)$$

$$\Delta_n(-y, q) = \operatorname{sh} \rho_n q \cos \rho_n y - \operatorname{ch} \rho_n q \sin \rho_n y,$$

$$-p < y < 0, \quad n \in N_0 = N \cup \{0\}.$$

4. Критерий единственность решения задачи C

Теорема 1. Если существует решение задачи C, то оно единственно тогда и только тогда, когда при всех $n \in N_0 = N \cup \{0\}$ выполнены условия

$$\Delta_n(p, q) \equiv \operatorname{ch} \rho_n q \sin \rho_n p + \operatorname{sh} \rho_n q \cos \rho_n p \neq 0, \quad (35)$$

где $\rho_n^2 = \lambda^2 + \mu_n^2$, $\mu_n = \pi n$, $n \in N_0$.

Доказательство. Пусть $v(x, y)$ – решения одно-родной задачи (8)-(10) для уравнения (7) и

$v(x, y) \in C^1(\bar{D}) \cap C_x^2(\bar{D}) \cap C_y^2(\bar{D}_2)$. Следуя работы [7], [9] введем функции

$$v_n(y) = \int_0^1 v(x, y) X_n(x) dx = \sqrt{2} \int_0^1 v(x, y) \cos \rho_n x dx. \quad (36)$$

где $\{1, \sqrt{2} \cos \rho_n x\}_{n=1}^{\infty}$ образует полный ортонормированный базис в $L_2[0, 1]$.

На основании (36) введем функции

$$v_n(y) = \sqrt{2} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} v(x, y) \cos \rho_n x dx, \quad (37)$$

где ε – достаточно малое число. Дифференцируя равенство (36) дважды по y при $y > 0$ и $y < 0$ с учетом уравнения (7), а затем, интегрируя по частям дважды в интегралах, содержащих производную v_{xx} и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ с учетом граничных условий (8), получим

$$\begin{cases} v_n''(y) - \rho_n^2 v_n(y) = 0, & 0 < y < q, \\ v_n''(y) + \rho_n^2 v_n(y) = 0, & -p < y < 0, \end{cases} \quad (38)$$

где $\rho_n^2 = \lambda^2 + \mu_n^2$, $\mu_n = \pi n$, $n \in N_0$.

Общее решение дифференциального уравнения (38) определяется по формуле (19) и (20).

Пусть теперь $g(x) = \psi(x) \equiv 0$, $\forall x \in [0, 1]$ и выполнены условия (31) при всех $n \in N_0$. Тогда в силу (9), (10) при $g_1(x) \equiv 0$ и $\psi_1(x) \equiv 0$ из (28), (29) имеем $g_{1n} \equiv 0$, $\psi_{1n} \equiv 0$. Из формул (32), (33) следует, что при всех $n \in N_0$ и любом $y \in [-p, q]$

$$\int_0^1 v(x, y) \cos \rho_n(x) dx = 0.$$

Отсюда, в силу полноты функции $\{1, \sqrt{2} \cos \rho_n x\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $L_2(0, 1)$ заключаем, что $v(x, y) = 0$ почти всюду на $[0, 1]$ при любом $y \in [-p, q]$. Поскольку функция $v(x, y)$ непрерывна на $\bar{D}$, то $v(x, y) \equiv 0$ в $\bar{D}$. Отсюда, в силу $\varphi(y) \equiv 0$ из (23) следует, что $u(x, y) \equiv 0$ в $\bar{D}$. Следовательно, задача C единственно при выполнении условия (31) при всех $n \in N_0$.

Естественно возникает вопрос о существовании нулей выражения $\Delta_{pq}(m) = 0$. С этой целью, перепишем (31) в следующем виде:

1) при $m = 0$

$$\Delta_0(p, q) = \sqrt{ch^2 \lambda q + sh^2 \lambda q} \sin(\pi m p \theta_0 + \nu_0), \quad (39)$$

2) при $m \in N$

$$\Delta_m(p, q) = \sqrt{ch^2 \rho_m q + sh^2 \rho_m q} \sin(\pi m p \theta_m + \nu_m), \quad (40)$$

где

$$\theta_m = \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{\pi m} \right)^2}, \quad \nu_m = \arcsin \frac{\operatorname{sh} \rho_m q}{\sqrt{ch^2 \rho_m q + sh^2 \rho_m q}}, \quad \rho_m^2 = \lambda^2 + \mu_m^2.$$

Следствие 1. $\Delta_{pq}(m) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$p = \frac{n}{\lambda} - \frac{v_0}{\lambda} \quad \text{при } m=0, n \in N; \quad (41)$$

$$p = \frac{n}{m\theta_m} - \frac{v_m}{m\pi\theta_m}, \quad m, n \in N. \quad (42)$$

Если при некоторых p, q и $n=m \in N_0$ нарушено условие (31), т.е. $\Delta_{pq}(m)=0$, то однородная задача (2) – (6) (где $g(x)=\psi(x)\equiv 0, \varphi(y)\equiv 0$) имеет нетривиальные решения

$$u_m(x,y) = \begin{cases} \sqrt{2}C_m \operatorname{sh} \lambda_m(q-y) \cos \mu_m x, & 0 < y < q, \\ \sqrt{2}C_m \Delta_m(-y,q) \cos \mu_m x, & -p < y < 0. \end{cases} \quad (43)$$

$C_m \neq 0$ – произвольная постоянная.

Легко установить, что построенная функция (43) удовлетворяет (2), (3) и однородными условиями (4)-(6).

Теорема 1 доказана.

5. Существование решения задачи С

Решение задачи С при условии (31) получено формально в виде сумм ортогональных рядов (33). Поскольку $\Delta_n(p,q)$ входит в знаменатель коэффициентов этих рядов, то для обоснования существования решения задачи С необходимо показать существование чисел p и q таких, что при больших n выражение $\Delta_n(p,q)$ отделено от нуля. В противном случае может возникнуть проблема малых знаменателей [10, 11].

Лемма 1. Если $\lambda=0, p \in N$, то при любом $q > 0$ существуют постоянные $C_1=C_1(q) > 0$, такая что при всех $n_0 \in N$, справедлива оценка

$$|\Delta_0(p,q)| \geq C_1 > 0, \quad n=0, \quad (44)$$

$$|\Delta_n(p,q)| \geq C_1 e^{\pi n q} > 0, \quad C_1 = \text{const} > 0, \quad n \in N.$$

Доказательство лемма 1. В силу равенства (40) при $n \in N_0, p \in N$ получим оценку

$$\begin{aligned} |\Delta_n(p,q)| &= \sqrt{ch^2 \pi n q + sh^2 \pi n q} |\sin(\pi n p + \gamma_n)| = \\ &= \sqrt{ch^2 \pi n q + sh^2 \pi n q} |\sin \gamma_n| = sh \pi n q = \frac{1}{2} e^{\pi n q} (1 - e^{-2\pi n q}) \geq \\ &\geq e^{\pi n q} \frac{1 - e^{-2\pi q}}{2} = C_1 e^{\pi n q} \end{aligned}$$

отсюда следует справедливость оценка (44).

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть $\lambda > 0$ и p – любое рациональное число, т.е. $p = \frac{\sigma}{\omega}, (\sigma, \omega)=1, \frac{\sigma}{\omega} \notin N_0, (\omega, 4)=1$. Тогда существуют положительные постоянные $q_0 = q_0(p), C_2 = C_2(q) > 0$, такие что при всех $q > q_0$ и $n \in N_0$, справедлива оценка

$$|\Delta_n(p,q)| \geq C_2 e^{\pi n q} > 0. \quad (45)$$

Лемма 3. Если $p > 0$ является любым иррациональным алгебраическим

числом степени $m \geq 2$, то существует положительно постоянные q_1 и C_3 , такие, что при всех $q > q_1$ и $n \in N_0$, справедливы оценки

$$\begin{cases} |\Delta_n(p,q)| \geq C_3 e^{\pi n q} / n^{\delta+1} & \text{при } m > 2, \\ |\Delta_n(p,q)| \geq C_3 e^{\pi n q} / n & \text{при } m = 2, \end{cases} \quad (46)$$

где $\delta > 0$ – достаточно малое число.

Лемма 2 и 3 доказываются точно также как в работах [10], [13].

Если выполнены условия (31), (44)-(46), то на основании частных решений (16), (19), (20), (21) с учетом (32) решение задачи С можно представить в виде

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \varphi(y) e^{-\frac{c}{a}x} + \frac{1}{c} v_0(y) \left(1 - e^{-\frac{c}{a}x} \right) + \frac{\sqrt{2}}{a} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) \cdot \int_0^x e^{\frac{c}{a}(t-x)} \cos \mu_n t dt = \\ &= \varphi(y) e^{-\frac{c}{a}x} + \frac{1}{c} v_0(y) \left(1 - e^{-\frac{c}{a}x} \right) + v(x,y), \end{aligned} \quad (47)$$

где

$$v(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{a} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) \cdot \int_0^x e^{\frac{c}{a}(t-x)} \cos \mu_n t dt, \quad (48)$$

$$v_n(y) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta_n(p,q)} [g_{1n} \Delta_n(p,y) + \psi_{1n} \operatorname{sh} \lambda_n(q-y)], & 0 < y < q, \\ \frac{1}{\Delta_n(p,q)} [g_{1n} \sin \lambda_n(p+y) + \psi_{1n} \Delta_n(-y,q)], & -p < y < 0, \quad n \in N_0. \end{cases} \quad (49)$$

здесь $\Delta_n(p,y)$ и $\Delta_n(-y,q)$ определяется из (34).

Теперь покажем, что ряд (48) при определенных условиях относительно заданной функции $g(x)$ и $\psi(x)$ сходится абсолютно и равномерно на замкнутой области $\bar{D}$ и допускает почленное дифференцирование по x и y дважды в замкнутых областях D_1 и D_2 .

Предварительно на основании лемм 1-3 установим оценки для коэффициентов $v_n(y)$ и его производных до второго порядка включительно.

Лемма 4. Пусть выполнены условия одной из лемм

1-2. Тогда при всех $n > n_0$ имеют место оценки:

$$|v_n(y)| \leq M_1 (|g_{1n}| + |\psi_{1n}|), \quad (50)$$

$$|v'_n(y)| \leq M_2 n (|g_{1n}| + |\psi_{1n}|), \quad y \in [-p, q],$$

$$|v''_n(y)| \leq M_3 n^2 (|g_{1n}| + |\psi_{1n}|), \quad y \in [0, q],$$

$$|v''_n(y)| \leq M_4 n^2 (|g_{1n}| + |\psi_{1n}|), \quad y \in [-p, 0], \quad (51)$$

где M_i ($i=\overline{1,4}$) – положительные постоянные.

Доказательство. Учитывая оценку (44)-(45) с учетом (19), (32) из (49) имеем

$$\begin{aligned} |v_n(y)| &\leq \left| \frac{g_{1n}}{\Delta_n(p,q)} \right| \cdot |\Delta_n(p,y)| + \\ &+ \left| \frac{\psi_{1n}}{\Delta_n(p,q)} \right| |\operatorname{sh} \lambda_n(q-y)| \leq M_1 (|g_{1n}| + |\psi_{1n}|), \\ &y \in [0, q], \end{aligned}$$

$$|v_n(y)| \leq \left| \frac{g_{1n}}{\Delta_n(p,q)} \right| \cdot |\sin \lambda_n(p+y)| +$$

$$+ \left| \frac{\psi_{1n}}{\Delta_n(p,q)} \right| |\Delta_n(-y,q)| \leq M_1 (|g_{1n}| + |\psi_{1n}|),$$

$$y \in [-p, 0].$$

Из последнего следует справедливости первое неравенство (50).

Чтобы доказать вторую оценку (50) найдем производную функций (49)

$$v'_n(y) = \begin{cases} \frac{\lambda_n}{\Delta_n(p,q)} [g_{1n} \Delta_n^{(1)}(p,y) - \psi_{1n} ch \lambda_n(q-y)], & 0 < y < q, \\ \frac{\lambda_n}{\Delta_n(p,q)} [g_{1n} \cos \lambda_n(p+y) - \psi_{1n} \Delta_n^{(1)}(-y,q)], & -p < y < 0, \end{cases} \quad (52)$$

где

$$\Delta_n^{(1)}(p,y) = sh \lambda_n y \sin \lambda_n p + ch \lambda_n y \cos \lambda_n p, \quad y > 0,$$

$$\Delta_n^{(1)}(-y,q) = sh \lambda_n q \sin \lambda_n y + ch \lambda_n q \cos \lambda_n y, \quad y < 0.$$

Учитывая оценку (45) из (52) находим

$$\begin{aligned} |v'_n(y)| &\leq \left| \frac{\lambda_n g_{1n}}{\Delta_n(p,q)} \right| \cdot |\Delta_n^{(1)}(p,y)| + \left| \frac{\lambda_n \psi_{1n}}{\Delta_n(p,q)} \right| |ch \lambda_n(q-y)| \leq \\ &\leq n M_2 (|g_{1n}| + |\psi_{1n}|), \quad y \in [0, q], \\ |v'_n(y)| &\leq \left| \frac{g_{1n}}{\Delta_n(p,q)} \right| \cdot |\cos \lambda_n(p+y)| + \left| \frac{\psi_{1n}}{\Delta_n(p,q)} \right| |\Delta_n^{(1)}(-y,q)| \leq \\ &\leq n M_2 (|g_{1n}| + |\psi_{1n}|), \quad y \in [-p, 0], \end{aligned}$$

Тогда из формулы (52) на основании (44)-(45) получаем вторую оценку (50).

Заметим, что функции (49) удовлетворяет равенствам (38). Отсюда в силу (50) следует справедливость оценок (51).

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда при всех $n > n_0$ имеют место оценки:

$$\begin{aligned} |v_n(y)| &\leq M_5 n^{\delta+1} (|g_{1n}| + |\psi_{1n}|), \\ |v'_n(y)| &\leq M_6 n^{\delta+2} (|g_{1n}| + |\psi_{1n}|), \quad y \in [-p, q], \\ |v''_n(y)| &\leq M_7 n^{\delta+3} (|g_{1n}| + |\psi_{1n}|), \quad y \in [0, q], \\ |v''_n(y)| &\leq M_8 n^{\delta+3} (|g_{1n}| + |\psi_{1n}|), \quad y \in [-p, 0], \end{aligned}$$

где M_i ($i=5,8$) – положительные постоянные.

Доказательство леммы 5 аналогично доказательству леммы 4. В этом случае используются оценки (46).

В силу леммы 4 ряд (48) и его производные первого и второго порядка при $(x, y) \in D$, мажорируется числовым рядом

$$M_9 \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} n^2 (|g_{1n}| + |\psi_{1n}|). \quad (53)$$

Лемма 6. Пусть функции $g_1(x)$, $\psi_1(x)$, $\varphi(y)$ удовлетворяют условиям $g_1(x)$, $\psi_1(x) \in C^4[0,1]$,

$$\varphi(y) \in C^2[-p, q], \quad g_1(0) = \psi_1(0) = g_1'(0) = \psi_1'(0) = 0,$$

$g_1(1) = \psi_1(1) = g_1''(1) = \psi_1''(1) = 0$. Тогда справедливо следующее представление:

$$g_{1n} = g_{1n}^{(4)} / \mu_n^4, \quad \psi_{1n} = \psi_{1n}^{(4)} / \mu_n^4, \quad n \in N_0, \quad (54)$$

$$\text{где} \quad g_{1n}^{(4)} = \sqrt{2} \int_0^1 g_1^{(4)}(x) \cos \mu_n x dx,$$

$$\psi_{1n}^{(4)} = \sqrt{2} \int_0^1 \psi_1^{(4)}(x) \cos \mu_n x dx, \quad \text{при этом}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} |g_{1n}^{(4)}|^2 &\leq \|g_1^{(4)}(x)\|_{L_2[0,1]}^2, \\ \sum_{n=1}^{+\infty} |\psi_{1n}^{(4)}|^2 &\leq \|\psi_1^{(4)}(x)\|_{L_2[0,1]}^2. \end{aligned} \quad (55)$$

Доказательство. Проинтегрируем по частям четыре раза интеграл из формулы (28), (29). Тогда, учитывая, что $g_1^{(i)}(k) = \psi_1^{(i)}(k) = 0$, $k=0,1$; $i=1,3$, получим

$$\begin{aligned} g_{1n} &= \sqrt{2} \int_0^1 g_1(x) \cos \mu_n x dx = \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{\mu_n^4} \int_0^1 g_1^{(4)}(x) \cos \mu_n x dx = \frac{g_{1n}^{(4)}}{\mu_n^4}, \\ \psi_{1n} &= \sqrt{2} \int_0^1 \psi_1(x) \cos \mu_n x dx = \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{\mu_n^4} \int_0^1 \psi_1^{(4)}(x) \cos \mu_n x dx = \frac{\psi_{1n}^{(4)}}{\mu_n^4}, \end{aligned}$$

где $g_1(x) = ag'(x) + cg(x)$, $\psi_1(x) = a\psi'(x) + c\psi(x)$.

Оценки (55) представляют собой неравенства Бесселя из теории рядов Фурье.

Лемма 6 доказана.

В силу равенств (54) и оценок (55) ряд (53) мажорируется сходящимся числовым рядом

$$M_{10} \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{1}{n} (|g_{1n}^{(4)}| + |\psi_{1n}^{(4)}|). \quad (56)$$

Тогда на основании сходимости ряда (56) в силу признака Вейерштрасса сходится абсолютно и равномерно ряд (48) на замкнутой области $\bar{D}$ и ряд допускают почленное дифференцирование по X и Y дважды в замкнутых областях $\bar{D}_1$ и $\bar{D}_2$.

Непосредственной постановкой (47) в уравнение (1) убеждаемся в том, что функция $u(x, y)$ определенной формулой (47), удовлетворяет (1), (4)-(7) и принадлежит классу (3).

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $\varphi(y) \in C^2[-p, q]$ и функции $g_1(x)$, $\psi_1(x)$ удовлетворяют условиям леммы 6 и выполнены условия одной из лемм 1 и 2. Тогда, если $\Delta_k(p, q) \neq 0$ при $k=1, k_0$, то существует единственное решение задачи C и оно определяется по формуле (47); если $\Delta_k(p, q) = 0$ при $k=m=k_1, k_2, \dots, k_r$, $r \in N$, то задача разрешима только тогда, когда выполнены условия ортогональности

$$g_{1k} = \sqrt{2} \int_0^1 g_1(x) \cos \mu_k x dx = 0, \quad \psi_{1k} =$$

$$= \sqrt{2} \int_0^1 \psi_1(x) \cos \mu_k x dx = 0, \quad k = k_1, k_2, \dots, k_r$$

и решение в этом случае определяется в виде

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \varphi(y) e^{\frac{c}{a}x} + \frac{1}{c} v_0(y) \left(1 - e^{\frac{c}{a}x} \right) + \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{a} \left(\sum_{k=1}^{k_1-1} + \dots + \sum_{k=k_r-1+1}^{k_r-1} + \sum_{k=k_r+1}^{+\infty} \right) v_k(y) \int_0^x e^{\frac{c}{a}(t-x)} \cos \mu_k t dt + \end{aligned}$$

$$+\sum_m H_m w_m(x, y), \quad (57)$$

в последней сумме m принимает значения $k_1, k_2, \dots, k_r$, если в конечных суммах (58) верхний предел меньше нижнего, то их следует считать нулями, здесь H_m – произвольные постоянные, $u_m(x, y)$ и $v_k(y)$ – соответственно определяется из (43) и (49). При этом функция $u(x, y)$ принадлежит классу (3).

Теперь покажем устойчивость решения задачи C от заданных функций $\varphi(y)$, $\psi(x)$ и $g(x)$.

Теорема 3(устойчивость). Пусть выполнены условия теорем 2, тогда для решения задачи C (см. (47)) справедливы оценки:

$$\|u(x, y)\|_{L_2[0,1]} \leq M_{11} \left(\|\varphi(y)\|_{L_2[0,q]} + \|g_1(x)\|_{L_2[0,1]} + \|\psi_1(x)\|_{L_2[0,1]} \right),$$

$$\|u(x, y)\|_{C(\bar{D})} \leq M_{12} \left(\|\varphi(y)\|_{C[0,1]} + \|g'_1(x)\|_{C[0,1]} + \|\psi'_1(x)\|_{C[0,1]} \right),$$

где M_j ($j=11,12$) – положительные постоянные.

Теорема 3 доказывается аналогично как работе [16] с использованием неравенств Коши-Буняковского и Бесселя.

Литература

1. Бицадзе А.В., Салахитдинов М.С. К теории уравнений смешанно-составного типа. // «Сибирский математический журнал». -Новосибирск: 1961. 2(1). -С. 7-19.
2. Салахитдинов М.С. Уравнение смешанно-составного типа. -Т.: «Фан», 1974. -С.156.
3. Хачев М.М. Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лаврентьев –Бицадзе в прямоугольной области. // «Дифференциальные уравнения». 1978. 14(1). -С.136-139.
4. Джурев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типа. Издательство: ФАН. 1979. 240 с.
5. Джурев Т.Д., Сопуев А., Мамажонов М. Краевые задачи для уравнений парабола-гиперболического типа. -Т.: «Фан». 1986. -С.220.
6. Кожанов А.И. О краевых задачах для некоторых классов уравнений высокого порядка, не разрешенных относительно старшей производной. // Сиб. мат. журнал. 1994. 35(2). -С. 359-376.
7. Моисеев Е.И. О решении спектральным методом одной нелокальной задачи. //«Дифференц. уравнения». 1999. 35(8). -С.1094-1100.
8. Джохадзе О.М. Влияние младших членов на корректность постановки характеристических задач для гиперболических уравнений третьего порядка. // "Мат. заметки". 2003. 74(4). -С. 517-528.
9. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области. // "Доклады РАН". 2007. 413(1). -С. 23-26.
10. Сабитов К.Б., Сафин Э.М. Обратная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в прямоугольной области. // "Изв. вузов. Матем.". 2010. № 4. -С. 55-62.
11. Удалова Г.Ю. Обратная задача для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа. // "Вестник СамГУ -Естественно-научная серия". 2010. 78(4). -С.116-122.
12. Сабитов К.Б. Краевая задача для уравнений смешанного типа третьего порядка в прямоугольной области. // «Дифференциальные уравнения». 2011. 47(5). -С.705-713.
13. Сабитов К.Б., Мартемьянова Н.В. Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа. // "Изв. Вузов. Математика". 2011. № 2. -С.71-85.
14. Salakhitdinov M.S., Karimov E.T. Uniqueness of inverse source non-local problem for fractional order mixed type equation. // "Euroasian Mathematical Journal". Eurasian National University. 2016. № 1. -P.74-83.
15. Yuldashev T. K., Islomov B. I., Alikulov E. K. Boundary value problems for a loaded parabolic-hyperbolic equations in infinite three dimensional domains third order. // "Lobachevskii Journal of Mathematics". 2020. 41(5). -P. 926-944. DOI: 10.1134/s1995080220050145.
16. Исламов Б.И., Убайдуллаев У.Ш. Обратная задача для уравнения смешанного типа с оператором дробного порядка в прямоугольной области. // "Изв. вузов. Матем.". Математика. 2021. № 3. -С.29-46.
17. Yuldashev T.K., Islomov B.I., Ubaydullaev U.Sh. On Boundary Value Problems for a Mixed Type Fractional Differential Equation with Caputo Operator. // "Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series". 2021. № 1(101). -P.127-137.
18. Islomov B.I., Kilishbaeva G.K. Boundary value problems for third-order mixed equations in the rectangular domain. // Science and Education in Karakalpakstan. 2022. 2/1(24). -P. 32-41.

РЕЗЮМЕ. Мақолада тўртбурчак соҳада эллиптик-гиперболик типдаги учинчи тартибли тенглама учун иккинчи тур чегаравий шарт билан берилган Дирихле типдаги масалани ечиш усули таклиф қилинган. Қўйилган масаланинг корректлиги аראлаш соҳанинг гиперболик қисмидаги тўртбурчак томонларининг нисбатига боғлиқ эканлиги кўрсатилган. Масаланинг ечими мос бир ўлчамли спектрал масаланинг хос функциялари бўйича қатор йиғиндиси шаклида тузилган. Ечимнинг ягоналик критерийи белгиланган. Берилган чегаравий функциялардан ечимнинг турғунлиги оид баҳолаш ишотланган.

РЕЗЮМЕ. В этой статье предлагается метод решения задачи типа Дирихле для уравнения третьего порядка эллиптико-гиперболического типа с граничным условием второго рода в прямоугольной области. Показано, что корректность постановки задачи существенным образом зависит от отношения сторон прямоугольника из гиперболической части смешанной области. Построено решение задачи в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи. Установлен критерий единственности решения. Доказаны оценки об устойчивости решения от заданных граничных функций.

SUMMARY. In this paper we propose a method for solving the Dirichlet-type problem for a third-order elliptic-hyperbolic equation with a boundary condition of the second kind in a rectangular region. It is shown that the correctness of the problem formulation essentially depends on the ratio of the sides of the rectangle from the hyperbolic part of the mixed region. The solution of the problem in the form of a sum of series on eigenfunctions of the corresponding one-dimensional spectral problem is constructed. The criterion of singularity of the solution is established. Estimates of stability of the solution from the given boundary functions are proved.

INFORMATIKA SOHASIDA YOLO (YOU ONLY LOOK ONCE) ALGORITM METHODLARIDAN FOYDALANILGAN HOLDA BARCHA TURDAGI RASM TASVIRLAR TURINI ANIQLASH

F.E.Madolimov – o'qituvchi
Andijon davlat chet tillar instituti

Tayanch so'zlar: eslab qoling, aniqlik, haqiqat, ijobiy, ob'ekt, YOLO algoritmi, determin.

Ключевые слова: напоминание, точность, правда, позитивы, алгоритм YOLO, объект, определение.

Key words: recall, precision, true, positives, YOLO algorithm, object, determining.

Tasvirlarni tasniflash kompyuterni ko'rishning asosiy vazifasi bo'lib, avtonom haydashdan tortib tibbiy tasvirga qadar ilovalar mavjud. An'anaviy usullar ko'pincha tasvir

ustidan bir nechta o'tishni talab qiladi yoki toymasin oynalarga tayanadi, bu esa samarasizlikka olib keladi. YOLO (You Only Look) innovatsion obyektni aniqlash algoritmi