

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ И ТРЕХМЕРНЫХ АЛГЕБР ЗИНБИЕЛЯ

У.Камалов – стажер преподаватель

Г.Хожобаева – магистрант

Т.Курбанбаев – доктор философии по физико-математическим наукам

Каракалтакский государственный университет имени Бердаха

Таянч сўзлар: Зинбиел алгебраси, дифференциал, базис, матрица, изоморф, алгебра.

Ключевые слова: алгебра Зинбиеля, дифференциальный, базис, матрица, изоморф, алгебра.

Key words: Zinbiel algebra, differential, basis, matrix, isomorph, algebra.

В этой статье мы рассчитываем матрицу D , используя таблицы умножения сложных разрешимых $\{2,3\}$ -мерных алгебр Зинбиеля, заданных в теоремах $\{1, 2\}$.

Для этого мы заменяем генеративные базисы $\{e_1, e_2, e_3\}$ следующим образом

$$\begin{aligned} d(e_1) &= a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3, \\ d(e_2) &= b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3, \\ d(e_3) &= c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3, \end{aligned} \quad (1)$$

где $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, $a_i, b_j, c_k \in \mathbb{C}$. Далее, умножения разрешимых комплексных алгебр Зинбиеля вычисляем с помощью свойства дифференцирования следующим образом

$$d(e_i \circ e_j) = d(e_i) \circ e_j + e_i \circ d(e_j). \quad (2)$$

Основной результат в этой статье состоит в том, что, используя результаты (2), мы составляем следующую матрицу

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_2 & c_3 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Теорема 1. Любая двухмерная комплексная алгебра Зинбиеля изоморфна одной из следующих не изоморфных алгебр:

$$A_1 : e_2 \circ e_2 = e_1, \quad \dim A_1 = 2.$$

$$\begin{aligned} d(e_1) &= a_1 e_1 + a_2 e_2, \\ d(e_2) &= b_1 e_1 + b_2 e_2. \\ d(e_1) &= d(e_2 \circ e_2) = d(e_2) \circ e_2 + e_2 \circ d(e_2) = \\ &= (b_1 e_1 + b_2 e_2) \circ e_2 + e_2 \circ (b_1 e_1 + b_2 e_2) = \\ &= b_2 e_1 + b_2 e_2 = 2b_2 e_2 \Rightarrow b_2 = \frac{1}{2} a_2. \\ e_1 \circ e_2 &= 0 \Rightarrow d(e_1 \circ e_2) = d(e_1) \circ e_2 + e_1 \circ d(e_2) = \\ &= (a_1 e_1 + a_2 e_2) \circ e_2 + e_1 \circ (b_1 e_1 + b_2 e_2) = \\ &= a_2 e_1 = 0 \Rightarrow a_2 = 0 \Rightarrow b_2 = 0. \end{aligned}$$

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A_2 : \text{абелева. } \dim A_2 = 2.$$

$$\begin{aligned} d(e_1) &= a_1 e_1 + a_2 e_2, \\ d(e_2) &= b_1 e_1 + b_2 e_2. \end{aligned}$$

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

(отсутствующие произведения равны нулю).

Теорема 2. Любая трехмерная комплексная алгебра Зинбиеля изоморфна одной из следующих попарно не изоморфных алгебр:

$$A_1 : e_1 \circ e_1 = e_2, e_1 \circ e_2 = \frac{1}{2} e_3, e_2 \circ e_1 = e_3, \quad \dim A_1 = 3.$$

$$\begin{aligned} d(e_1) &= a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3, \\ d(e_2) &= b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3. \\ d(e_2) &= d(e_1 \circ e_1) = d(e_1) \circ e_1 + e_1 \circ d(e_1) = \\ &= (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) \circ e_1 + e_1 \circ (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) = \\ &= a_1 (e_1 \circ e_1) + a_2 (e_2 \circ e_1) + a_3 (e_3 \circ e_1) + a_1 (e_1 \circ e_1) + \\ &+ a_2 (e_1 \circ e_2) + a_3 (e_1 \circ e_3) = a_1 e_2 + a_2 e_3 + a_1 e_2 + \\ &+ \frac{1}{2} a_2 e_3 = 2a_1 e_2 + \frac{3}{2} a_2 e_3 \Rightarrow b_1 = 0, b_2 = 2a_1, b_3 = \\ &= \frac{3}{2} a_2. \Rightarrow d(e_2) = 2a_1 e_2 + \frac{3}{2} a_2 e_3. \\ d(e_3) &= 2d(e_1 \circ e_2) = 2(d(e_1) \circ e_2 + e_1 \circ d(e_2)) = \\ &= 2((a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) \circ e_2 + e_1 \circ (2a_1 e_2 + \\ &+ \frac{3}{2} a_2 e_3)) = 2(a_1 \cdot \frac{1}{2} e_3 + 2a_1 \cdot \frac{1}{2} e_3) = 2 \cdot \frac{3}{2} a_1 e_3 = 2a_1 e_3, \\ d(e_3) &= d(e_2 \circ e_1) = d(e_2) \circ e_1 + e_2 \circ d(e_1) = \\ &= (b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3) \circ e_1 + e_2 \circ (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) = \\ &= b_1 (e_1 \circ e_1) + b_2 (e_2 \circ e_1) + b_3 (e_3 \circ e_1) + a_1 (e_2 \circ e_1) + \\ &+ a_2 (e_2 \circ e_2) + a_3 (e_2 \circ e_3) = b_2 e_3 + a_1 e_3 = \\ &= (a_1 + b_2) e_3 = (a_1 + 2a_1) e_3 = 3a_1 e_3. \end{aligned}$$

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & 2a_1 & 0 \\ a_3 & \frac{3}{2} a_2 & 3a_1 \end{pmatrix}.$$

$$A_2 : e_1 \circ e_1 = e_3, \quad \dim A_2 = 3.$$

$$\begin{aligned} d(e_1) &= a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3, \\ d(e_2) &= b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3. \\ d(e_3) &= d(e_1 \circ e_1) = d(e_1) \circ e_1 + e_1 \circ d(e_1) = \\ &= (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) \circ e_1 + e_1 \circ (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) = \\ &= a_1 e_3 + a_1 e_3 = 2a_1 e_3, \end{aligned}$$

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_1 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 2a_1 \end{pmatrix}.$$

$$A_3 : e_1 \circ e_2 = e_3, e_2 \circ e_1 = -e_3, \quad \dim A_3 = 3.$$

$$d(e_1) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3,$$

$$d(e_2) = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3,$$

$$d(e_3) = d(e_1 \circ e_2) = d(e_1) \circ e_2 + e_1 \circ d(e_2) =$$

$$= (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) \circ e_1 + e_1 \circ (b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3) =$$

$$= a_1 e_3 + b_2 e_3 = (a_1 + b_2) e_3.$$

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & a_1 + b_2 \end{pmatrix}.$$

$$A_4 : e_1 \circ e_1 = e_3, e_1 \circ e_2 = e_3, e_2 \circ e_2 = \alpha e_3, \alpha \in \mathbb{C} \quad \dim A_4 = 3.$$

$$d(e_1) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3,$$

$$d(e_2) = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3,$$

$$d(e_3) = d(e_1 \circ e_1) = d(e_1) \circ e_1 + e_1 \circ d(e_1) =$$

$$= (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) \circ e_1 + e_1 \circ (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) =$$

$$= a_1 e_3 + a_2 e_3 = (a_1 + a_2) e_3,$$

$$d(e_3) = d(e_1 \circ e_2) = d(e_1) \circ e_2 + e_1 \circ d(e_2) =$$

$$= (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) \circ e_1 + e_1 \circ (b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3) =$$

$$= a_1 e_3 + \alpha a_2 e_3 + b_1 e_3 + b_2 e_3 = (a_1 + \alpha a_2 + b_1 + b_2) e_3,$$

$$d(e_3) = \frac{1}{\alpha} d(e_2 \circ e_2) = \frac{1}{\alpha} (d(e_2) \circ e_2 + e_2 \circ d(e_2)) =$$

$$= \frac{1}{\alpha} ((b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3) \circ e_2 + e_2 \circ$$

$$\circ (b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3)) = \frac{1}{\alpha} (b_1 e_3 + \alpha b_2 e_3 + \alpha b_2 e_3) =$$

$$= \frac{1}{\alpha} (b_1 + 2\alpha b_2) e_3 = \left(\frac{1}{\alpha} b_1 + 2b_2\right) e_3,$$

$$a_1 + \alpha a_2 + b_1 + b_2 = a_1 + a_2 \Rightarrow b_1 + b_2 =$$

$$= (1 - \alpha) a_2 \Rightarrow d(e_3) = (a_1 + a_2) e_3 \Rightarrow a_1 + a_2 =$$

$$= \frac{1}{\alpha} b_1 + 2b_2 \Rightarrow b_2 = \frac{1}{2} \left(a_1 + a_2 - \frac{1}{\alpha} b_1\right).$$

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & \frac{1}{2}(a_1 + a_2 - \frac{1}{\alpha} b_1) & 0 \\ a_3 & b_3 & a_1 + a_2 \end{pmatrix}.$$

$$A_5 : e_1 \circ e_1 = e_3, e_1 \circ e_2 = e_3, e_2 \circ e_2 = e_3, \quad \dim A_5 = 3.$$

$$d(e_1) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3,$$

$$d(e_2) = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3,$$

$$d(e_3) = d(e_1 \circ e_1) = d(e_1) \circ e_1 + e_1 \circ d(e_1) =$$

$$= (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) \circ e_1 + e_1 \circ (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) =$$

$$= a_1 e_3 + a_2 e_3 + a_1 e_3 + a_2 e_3 = 2(a_1 + a_2) e_3,$$

$$d(e_3) = d(e_1 \circ e_2) = d(e_1) \circ e_2 + e_1 \circ d(e_2) =$$

$$= (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) \circ e_1 + e_1 \circ (b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3) =$$

$$= a_1 e_3 + b_1 e_3 + b_2 e_3 = (a_1 + b_1 + b_2) e_3,$$

$$d(e_3) = d(e_2 \circ e_1) = d(e_2) \circ e_1 + e_2 \circ d(e_1) =$$

$$= (b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3) \circ e_1 + e_1 \circ (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) =$$

$$= b_1 e_3 + b_2 e_3 + a_2 e_3 = (b_1 + b_2 + a_2) e_3,$$

$$\begin{cases} 2(a_1 + a_2) = a_1 + b_1 + b_2, \\ a_1 + b_1 + b_2 = b_1 + b_2 + a_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 + b_2 = 3a_1. \end{cases} \Rightarrow d(e_3) = 4a_1.$$

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_1 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 4a_1 \end{pmatrix}.$$

$$A_6 : \text{абелева}, \quad \dim A_6 = 3.$$

$$d(e_1) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3,$$

$$d(e_2) = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3,$$

$$d(e_3) = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3,$$

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

(Отсутствующие произведения равны нулю)

Мы вычислили все случаи умножения разрешимых комплексных алгебр Зинбиеля и не написали лишних решений.

Литература

1. Adashev J.Q., Khudoyberdiyev A.Kh., Omirov B.A. Complex naturally graded quasi-filiform Zinbiel algebras. // Contemporary Mathematics. AMS 2009. -P. 1-13.
2. Adashev J.Q., Omirov B.A., Khudoyberdiyev A.Kh. Classifications of some classes of Zinbiel algebras. // Journal of Generalized Lie Theory and applications. 2010. Vol. 3(4), -P. 1-10.
3. Adashev J.Q., Omirov B.A., Khudoyberdiyev A.Kh. On some nilpotent classes of Zinbiel algebras and their applications. // Third International Conference on Research and Education in Mathematics. 2007. -Malaysia: -P.45-47.

РЕЗЮМЕ. Ушбу мақолада биз мураккаб ечилиладиган $\{2,3\}$ ўлчовли Зинбиел алгебраларининг кўпайтириш жадваллари ёрдамида матрицани ҳисоблаймиз. Асосан $\{1,2\}$ – теоремалардаги кўпайтиш жадвалларини ҳисоблаб, натижаларни оламиз.

РЕЗЮМЕ. В этой статье мы рассчитываем матрицу D , используя таблицы умножения сложных разрешимых $\{2,3\}$ -мерных алгебр Зинбиеля. В основном, вычисляя таблицы умножения в теоремах $\{1,2\}$, мы получаем результаты.

SUMMARY. In this paper, we calculate the D matrix using multiplication tables of complex solvable $\{2,3\}$ -dimensional Zinbiel algebras. Basically, by calculating the multiplication tables in theorems $\{1,2\}$, we get the results.