

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D=0 \\ A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D=0 \\ B+D=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-C \\ \sqrt{2}C+B+\sqrt{2}C+D=0 \\ -C-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D=0 \\ B+D=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=-C \\ 2\sqrt{2}C+B+D=0 \\ -\sqrt{2}B+\sqrt{2}D=0 \\ D=1-B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-C \\ -2\sqrt{2}C=1 \\ -\sqrt{2}B=-\sqrt{2}D \\ D=1-B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-C \\ -C=\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ B=D \\ 2D=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=-C=\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ D=\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1} \quad \text{birdeyligine}$$

A,V,S,D hárípleriniń mánislerin qoysaq, onda tómendegi birdeylikke iye bolamız:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^4+1} &= \frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} - \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x-\frac{1}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{x+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} - \\ & - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \\ & + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2+x\sqrt{2}+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2-x\sqrt{2}+1}; \end{aligned}$$

Endi berilgen integraldı tómendegishe tabamız:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4+1} &= \int \frac{1}{x^4+1} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2+x\sqrt{2}+1} - \\ & - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2-x\sqrt{2}+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{d(x^2+x\sqrt{2}+1)}{x^2+x\sqrt{2}+1} - \\ & - \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{d(x^2-x\sqrt{2}+1)}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} = \\ & = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{2}{4\sqrt{2}} \int \frac{d(x\sqrt{2}+1)}{(x\sqrt{2}+1)^2+1} + \frac{2}{4\sqrt{2}} \int \frac{d(x\sqrt{2}-1)}{(x\sqrt{2}-1)^2+1} = \\ & = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctg(x\sqrt{2}+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctg(x\sqrt{2}-1) + C; \end{aligned}$$

Адебиётлар

1. Гусак А.А. Пособие к решению задач по высшей математике – Минск: Издательство БГУ, 2008.
2. Вилинкин Н.Я., Бохан К.А. Задачник по курсу математического анализа. – Москва: «Просвещение», 2010.

REZYUME. Ushbu maqolada murakkab funksiyalarning noaniq integrallarini topish usullari ko'rsatilgan.

РЕЗЮМЕ. В статье приведены различные методы неопределённых интегрированных сложных функций.

SUMMARY. The article presents various methods of indefinite integration of complex functions.

ПРОБЛЕМА СХОДИМОСТИ ИНТЕРВАЛЬНОГО МЕТОДА ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ ДЛЯ РАСЧЕТА УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.А.Ибрагимов – кандидат физико-математических наук, доцент

Д.Н.Хамроева – старший преподаватель

Т.Т.Мамуров – базовый докторант

Навоийский государственный педагогический институт

Таянч сўзлар: электр тармоқлари, электр тизимларининг ночизикли турғун ҳолат тенгламалари, интервал таҳлил, комплекс интервал сонлар тўплами, спектрал радиус.

Ключевые слова: электрические сети, нелинейные уравнения установившихся режимов электрических систем, интервальный анализ, комплексное множество интервальных чисел, спектральный радиус.

Key words: electrical networks, non-linear steady state equations of electrical systems, interval analysis, complex set of interval numbers, spectral radius.

Введение. Расчеты установившихся режимов являются основной задачей проектирования и эксплуатации электрических сетей (ЭС) [1]. Результаты этих расчетов используются при планировании режимов и оперативном управлении, а также служат базой для выполнения оптимизации, анализа устойчивости и надежности. Большинство разработанных и используемых в настоящее время методов для расчёта режимов и потерь электроэнергии (ЭЭ) в сетях всех ступеней напряжения основаны на детерминированном представлении исходной информации, т.е. используют те или иные допущения. Фактически, имеющаяся исходная информация для расчетов обладает неопределённостью, иными словами являются неполной или ограниченно достоверной. Проблема неопределённости исходных данных в полной мере относится к электроэнергетическим системам (ЭЭС). Параметры элементов ЭЭС в большинстве случаев определяются по паспортным, проектным или справочным данным, основываются на значительном количестве допущений, и считаются неизменными или слабо меняющимися. В тоже время известно, что параметры линий электропередачи,

трансформаторов, реакторов (особенно управляемых), средств компенсации реактивной мощности зависят от многих факторов и могут претерпевать ощутимые изменения в процессе эксплуатации. Применение детерминированных или вероятностно-статистических методов для расчёта режимов и потерь ЭЭ не учитывает указанные выше особенности исходной информации. Результаты расчётов, получаемые в виде детерминированных значений также не отражают возможные диапазоны изменения режимных переменных. Применение же вероятностно-статистических методов требует получения большого объёма статистических данных и построения сложных моделей, что само по себе вызывает известную неопределённость. Интервальный подход позволяет внести математическую строгость в построение численных алгоритмов, учитывающих интервальную неопределённость значений параметров режима ЭС [2].

Предварительные факты и обозначения. В дальнейшем изложении мы используем обозначения из проекта неформального международного стандарта [4] для интервальных величин, разработанную ведущими специалистами в области интервального анализа. В

частности, интервальные величины выделяются в тексте жирным шрифтом, а неинтервальные никак не выделяются.

В интервальном анализе в качестве комплексных интервалов чаще всего используются прямоугольные и круговые комплексные интервалы [5, 6]. Соответствующие множества обозначаются через $\mathbb{IC}_{rect}$ и $\mathbb{IC}_{circ}$. Далее мы будем рассматривать интервалы только из $\mathbb{IC}_{rect}$, так как для краткости обозначим это множество просто $\mathbb{IC}$:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + i\mathbf{a}_2 = \{a = a_1 + ia_2 \in \mathbb{C} \mid a_1 \in \mathbf{a}_1, a_2 \in \mathbf{a}_2\}$$

для вещественных интервалов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{IR}$.

Интервальное число $\mathbf{a} = [\underline{a}, \bar{a}] \in \mathbb{IR}$ характеризуется несколькими функциями:

- серединой (центром) $\text{mid } \mathbf{a} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \bar{a})$;
- радиусом $\text{rad } \mathbf{a} = \frac{1}{2}(\bar{a} - \underline{a})$;
- шириной $\text{wid } \mathbf{a} = \bar{a} - \underline{a}$;
- абсолютной величиной

$$|\mathbf{a}| := \max \{ |a| \mid a \in \mathbf{a} \} = \max \{ |\underline{a}|, |\bar{a}| \} \text{ и т.д.}$$

Аналогично вещественному случаю, введем соответствующие арифметические операции и функции для комплексных интервалов.

$$\begin{cases} (\mathbf{a}_1 + i\mathbf{b}_1) + (\mathbf{a}_2 + i\mathbf{b}_2) = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) + i(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) \\ (\mathbf{a}_1 + i\mathbf{b}_1) - (\mathbf{a}_2 + i\mathbf{b}_2) = (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2) + i(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) \\ (\mathbf{a}_1 + i\mathbf{b}_1) \cdot (\mathbf{a}_2 + i\mathbf{b}_2) = (\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_1\mathbf{b}_2) + i(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1) \\ (\mathbf{a}_1 + i\mathbf{b}_1) / (\mathbf{a}_2 + i\mathbf{b}_2) = \\ = \frac{1}{\mathbf{a}_2^2 + \mathbf{b}_2^2} ((\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_1\mathbf{b}_2) + i(\mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1\mathbf{b}_2)), \quad 0 \notin (\mathbf{a}_2 + i\mathbf{b}_2) \end{cases}$$

Определение 1. Пусть $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + i\mathbf{a}_2 \in \mathbb{IC}$. Тогда величина $|\mathbf{a}| = \sqrt{|\mathbf{a}_1|^2 + |\mathbf{a}_2|^2}$ называется абсолютной величиной или модулем комплексного интервала $\mathbf{a}$.

Определение 2. Пусть $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + i\mathbf{a}_2 \in \mathbb{IC}$. Тогда радиусом комплексного интервала $\mathbf{a}$ будем называть величину $\text{rad } \mathbf{a} = \text{rad } \mathbf{a}_1 + \text{rad } \mathbf{a}_2$.

Определение 3. Пусть $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + i\mathbf{a}_2 \in \mathbb{IC}$. Тогда шириной комплексного интервала $\mathbf{a}$ будем называть величину $\text{wid } \mathbf{a} = \text{wid } \mathbf{a}_1 + \text{wid } \mathbf{a}_2$.

Введем Хаусдорфова метрику [5] в пространстве $\mathbb{IC}^n$.

Определение 4. Пусть $\mathbf{a} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2], \mathbf{b} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2] \in \mathbb{IR}$. Тогда расстояние между элементами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ вводится следующим образом:

$$\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \max \{ |\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1|, |\mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_2| \}.$$

Определение 5. Пусть $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2], \mathbf{y} = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2] \in \mathbb{IR}^n$. Тогда метрика на многомерном интервальном пространстве для векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ определяется как:

$$\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \max \{ \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1\|, \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{y}_2\| \},$$

где $\|\cdot\|$ - абсолютная векторная норма в $\mathbb{R}^n$.

Определение 6. Пусть $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + i\mathbf{x}_2, \mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + i\mathbf{y}_2 \in \mathbb{IC}^n$.

Тогда метрика на пространстве $\mathbb{IC}^n$ для векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ определяется соотношением:

$$\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \text{dist}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \text{dist}(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2).$$

Определение 7. Интервальное отображение $f: \mathbb{IC}^n \rightarrow \mathbb{IC}^n$ называется P -сжатием (или P -сжимающим), если существует неотрицательная $n \times n$ -матрица P со спектральным радиусом $\rho(P) < 1$, такая что для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{IC}^n$ имеет место

$$\text{dist}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \leq P \cdot \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Предложение 1. Для любых интервальных матриц $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{IC}^{n \times n}$ и интервальных векторов $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{IC}^n$ имеют место, следующие легко доказуемые свойства:

$$\text{dist}(\mathbf{A} + \mathbf{C}, \mathbf{B} + \mathbf{C}) = \text{dist}(\mathbf{A}, \mathbf{B}),$$

$$\text{dist}(\mathbf{A} + \mathbf{B}, \mathbf{C} + \mathbf{D}) = \text{dist}(\mathbf{A}, \mathbf{C}) + \text{dist}(\mathbf{B}, \mathbf{D}),$$

$$\text{dist}(\mathbf{AB}, \mathbf{AC}) \leq |\mathbf{A}| \cdot \text{dist}(\mathbf{B}, \mathbf{C}),$$

$$\text{dist}(\mathbf{Ab}, \mathbf{Ac}) \leq |\mathbf{A}| \cdot \text{dist}(\mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

Для знакомство основами интервального анализа читатель может обратиться к сайту под названием «Интервальный анализ и его приложения» [8], разработанную профессором Новосибирского государственного университета С.П.Шарым. Этот веб-сайт содержит ресурсы большого объема по интервальному анализу и его приложений, а также гиперссылки к другим сайтам посвященные на этой области науки.

Постановка задачи. Задача установившихся режимов электроэнергетических систем сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами [1, 2], связывающих токи и напряжения в узлах сети:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \frac{S_i}{\dot{X}_i} - a_{i0} x_0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Здесь, a_{ij} - элементы комплексной матрицы собственных и взаимных проводимостей системы, S_i - значение мощности в i -ом узле, X_i - вектор-столбец напряжений узлов, а $\dot{X}_i$ - комплексно-сопряженное число для X_i , a_{i0} - матрица проводимостей ветвей связи балансирующего узла с остальными узлами и X_0 - напряжения балансирующего узла.

Параметры балансирующего узла a_{i0} и X_0 считаются заданными, но могут и меняться в процессе решения более общей задачи. Система (1) является «разреженной» в том смысле, что большинство коэффициентов a_{ij} равны нулю. Они отличны от нуля в том случае, если i -й и j -й узлы сети связаны непосредственно.

Теперь запишем систему (1) в интервальном виде, который соответствует режимным параметрам с интервальной неопределенностью:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \frac{S_i}{\dot{X}_i} - a_{i0} x_0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Обозначая левую часть последней системы через $F(\mathbf{a}, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$, можем записать её в кратком виде как $F(\mathbf{a}, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{s}$ для $\mathbf{a} \in \mathbf{a}$, $\mathbf{s} \in \mathbf{s}$.

Для системы (3) объединенным множеством решений называют множество

$$\Xi(F, \mathbf{a}, \mathbf{s}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C} \mid (\exists \mathbf{a} \in \mathbf{a})(\exists \mathbf{s} \in \mathbf{s})(F(\mathbf{a}, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{s})\},$$

и ниже мы будем рассматривать задачу его внешнего интервального оценивания [6].

Таким образом, нашей целью является нахождение, по-возможности, наилучшего (т.е. наименьшего по включению) интервального вектора, ограничивающего множество решений $\Xi(F, \mathbf{a}, \mathbf{s})$ в интервальном комплексном пространстве.

Метод решения и исследование на сходимость. При решении системы (2) возникает определенные сложности в реализации расчетов, так как приходится иметь дело с комплексными интервальными матрицами высокого порядка и с большими системами нелинейных уравнений. Для нелинейных систем уравнений естественно применять итерационные методы решения. При этом очень важна структура итерационного процесса, от нее будет зависеть удобство реализации процесса, скорость сходимости и качества интервального решения.

Интервальный метод обратной матрицы определяется из соотношений (2) и, следовательно, расчет производится по формуле

$$\mathbf{x}^{(k+1)} := \mathbf{x}^{(k)} \cap \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y}^{(k)}, \quad (3)$$

где $\mathbf{x}^{(k)}$ и $\mathbf{x}^{(k+1)}$ - значения компонент интервального вектора решения $\mathbf{x}$, соответственно, при k -й и $(k+1)$ -й итерациях.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}^{(k)} = \begin{pmatrix} s_1 / \dot{x}_1^{(k)} - a_{10}x_0 \\ s_2 / \dot{x}_2^{(k)} - a_{20}x_0 \\ \vdots \\ s_n / \dot{x}_n^{(k)} - a_{n0}x_0 \end{pmatrix}.$$

Итерационный расчёт продолжается по формулу (3), пока не выполнится условие $\text{dist}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^{(k-1)}) < \varepsilon$, где $\text{dist}(\cdot, \cdot)$ - Хаусдорфова метрика [5] в пространстве $\mathbb{IC}^n$, ε - требуемая точность.

В классической интервальной арифметике $\mathbb{IR}$, также в комплексной интервальной арифметике $\mathbb{IC}$ операция вычитания не являются обратной к сложению. Поэтому мы введем операцию нестандартного вычитания в интервальной арифметике Маркова [7] и записываем для прямоугольных комплексных интервалов:

$$\mathbf{a} \ominus \mathbf{b} = (\mathbf{a}_1 + i\mathbf{a}_2) \ominus (\mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2) = (\mathbf{a}_1 \ominus \mathbf{b}_1) + i(\mathbf{a}_2 \ominus \mathbf{b}_2) = \\ = [\min\{\underline{a}_1 - \underline{b}_1, \bar{a}_1 - \bar{b}_1\}, \max\{\underline{a}_1 - \underline{b}_1, \bar{a}_1 - \bar{b}_1\}] + \\ + i[\min\{\underline{a}_2 - \underline{b}_2, \bar{a}_2 - \bar{b}_2\}, \max\{\underline{a}_2 - \underline{b}_2, \bar{a}_2 - \bar{b}_2\}].$$

Тогда в силу (2), имеем

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^{(k+1)} \ominus \mathbf{A}\mathbf{x} = \left(\frac{s_i}{\dot{x}_i^{(k)}} - a_{i0}x_0 \right) \ominus \left(\frac{s_i}{\dot{x}_i} - a_{i0}x_0 \right),$$

следовательно,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k+1)} \ominus \mathbf{x}) = - \frac{s_i}{\dot{x}_i \dot{x}_i^{(k)}} (\dot{x}_i^{(k)} \ominus \dot{x}_i). \quad (4)$$

Далее, применяя обозначение $\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} \ominus \mathbf{x}$, соответственно $\dot{\mathbf{z}}^{(k)} = \dot{\mathbf{x}}^{(k)} \ominus \dot{\mathbf{x}}$, получим итерационную формулу:

$$\mathbf{z}^{(k+1)} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{D}^{(k)} \dot{\mathbf{z}}^{(k)}, \text{ где } \mathbf{D}^{(k)} = -\text{diag} \left(\frac{s_i}{\dot{x}_i \dot{x}_i^{(k)}} \right).$$

Сходимости созданного итерационного процесса обеспечить следующая теорема:

Теорема: Метод обратной матрицы, определяемый формулой

$$\mathbf{z}^{(k+1)} := \mathbf{A}^{-1} \mathbf{D}^{(k)} \dot{\mathbf{z}}^{(k)}$$

для задачи (2) с произвольным начальным интервальным вектором $\mathbf{z}^{(0)} \in \mathbb{IC}^n$ сходится к единственной неподвижной точке $\mathbf{z}^*$ тогда и только тогда, когда $\rho(|\mathbf{A}^{-1} \mathbf{D}|) < 1$.

При доказательстве этой теоремы, опираемся на теорему Шрёдера о неподвижной точке, используя сжимающего оператора для интервального отображения $f: \mathbb{IC}^n \rightarrow \mathbb{IC}^n$ [3].

Доказательство. Достаточность. Рассмотрим отображение $f: \mathbb{IC}^n \rightarrow \mathbb{IC}^n$, определяемое формулой $f(\mathbf{z}) = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{D} \dot{\mathbf{z}}$. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{IC}^n$. Применяя свойства метрики для интервальных векторов $\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{dist}(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}})$ и из соотношений, приведенных в предложении 1, получаем

$$\text{dist}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = \text{dist}(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{D} \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{A}^{-1} \mathbf{D} \dot{\mathbf{y}}) =$$

$$= \text{dist}(\mathbf{A}^{-1} \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{A}^{-1} \dot{\mathbf{y}}) + \text{dist}(\mathbf{D} \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{D} \dot{\mathbf{y}}) \leq$$

$$\leq |\mathbf{A}^{-1}| \cdot \text{dist}(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}) + |\mathbf{D}| \cdot \text{dist}(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}) = (|\mathbf{A}^{-1} \mathbf{D}|) \cdot (\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^2.$$

Из теоремы 1 из [2] следует, что условие $\rho(|\mathbf{A}^{-1} \mathbf{D}|) < 1$ достаточно для сходимости метода и единственности неподвижной точки.

Необходимость. Предполагаем, что последовательные приближения

$$\mathbf{z}^{(k+1)} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{D}^{(k)} \dot{\mathbf{z}}^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

сходятся для каждого $\mathbf{z}^{(0)} \in \mathbb{IC}^n$ к неподвижной точке $\mathbf{z}^*$. Покажем, что $\rho(|\mathbf{A}^{-1} \mathbf{D}_2^{(k)}|) < 1$.

В силу теоремы Перрона-Фробениуса [6], неотрицательная точечная матрица $|\mathbf{A}|$ имеет неотрицательный собственный вектор $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, соответствующий наибольшему по модулю неотрицательному собственному значению $\lambda = \rho(|\mathbf{A}|)$. Из сходимости итерационного процесса (6) к $\mathbf{z}^*$, при любом начальном векторе $\mathbf{z}^{(0)}$ следует, что последовательность векторов покомпонентных радиусов $\{\text{rad } \mathbf{z}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ сходится к $\text{rad } \mathbf{z}^*$.

Выберем теперь $\mathbf{z}^{(0)}$, в качестве начального приближения для итерационного процесса (6), таким образом, чтобы $\text{rad } \mathbf{z}^{(0)}$ был собственным вектором, соответствующему собственному значению $\lambda = \rho(|\mathbf{A}^{-1} \mathbf{D}|)$ матрицы $|\mathbf{B}| + |\mathbf{D}_1|$, причем хотя бы одна компонента

вектора $\text{rad } \mathbf{z}^{(0)}$ была строго больше, чем соответствующая компонента вектора $\text{rad } \mathbf{z}^*$. Тогда предполагая $\lambda \geq 1$ и $\text{rad } \mathbf{z} = \text{rad } \dot{\mathbf{z}}$, мы можем заключить, что

$$\text{rad } \mathbf{z}^{(1)} = \text{rad}(\mathbf{B}\mathbf{z}^{(0)}) + \text{rad}(\mathbf{D}_1^{(0)}\mathbf{z}^{(0)}) \geq |\mathbf{B}| \text{rad } \mathbf{z}^{(0)} + |\mathbf{D}_1^{(0)}| \text{rad } \mathbf{z}^{(0)} = (|\mathbf{B}| + |\mathbf{D}_1^{(0)}|) \text{rad } \mathbf{z}^{(0)} = \lambda \text{rad } \mathbf{z}^{(0)} \geq \text{rad } \mathbf{z}^{(0)}.$$

Аналогично

$$\text{rad } \mathbf{z}^{(2)} \geq (|\mathbf{B}| + |\mathbf{D}_1^{(1)}|) \text{rad } \mathbf{z}^{(1)} \geq (|\mathbf{B}| + |\mathbf{D}_1^{(1)}|) \lambda \text{rad } \mathbf{z}^{(0)} = \lambda^2 \text{rad } \mathbf{z}^{(0)} \geq \text{rad } \mathbf{z}^{(0)},$$

и т.д.

Теперь для произвольного номера k по методу индукции имеем

$$\text{rad } \mathbf{z}^{(k)} \geq (|\mathbf{B}| + |\mathbf{D}_1^{(k-1)}|) \text{rad } \mathbf{z}^{(k-1)} \geq \dots \geq \lambda^k \text{rad } \mathbf{z}^{(0)} \geq \text{rad } \mathbf{z}^{(0)}.$$

Переходя к пределу, при $k \rightarrow \infty$, получаем

$$\text{rad } \mathbf{z}^* \geq \text{rad } \mathbf{z}^{(0)},$$

что противоречит нашему выбору начального вектора $\mathbf{z}^{(0)}$. Следовательно, сделанное нами допущение

Литература

1. Фазылов Х.Ф., Насыров Т.Х. Установившиеся режимы электроэнергетических систем и их оптимизация. - Ташкент: Молия, 1999.
2. Ибрагимов А.А. Интервально-итеративные методы решения узловых уравнений установившихся режимов электрических сетей. // Вестник НУУЗ, 2010, №3, -С. 87-91.
3. Jaulin L., Kieffer M., Didrit O. and Walter E. Applied Interval Analysis. – London: Springer, 2001.
4. Kearfott R.B., Nakao M.T., Neumaier A., Rump S.M., Shary S.P., Hentenryck P. Standardized notation in interval analysis. // Interval analysis: Proceedings of XIII Baikal International School-seminar "Optimization methods and their applications", July, 2 – 8, Irkutsk, Baikal, 2005. Vol. 4. Irkutsk: Melentiev Energy Systems Institute SB RAS. –P. 106-113. <http://interval.ict.nsc.ru/Introduction/INotation.pdf>
5. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. - Москва: «Мир», 1987.
6. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. - Электронная книга, см.: <http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks>
7. Кальмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. - Новосибирск: «Наука», 1986.
8. Интернет сайт: «Интервальный анализ и его приложения». URL: <http://interval.ict.nsc.ru>.

РЕЗЮМЕ. Мақолада параметрлари интервал ноаниқликка эга бўлган шартларда электроэнергетик тизимларининг баркарор ҳолатларини ҳисоблаш учун тескари матрица итерацион усули қаралган. Таклиф этилаётган усулнинг интервал комплекс сонлар фазосида яқинлашиш масаласи тадқиқ қилинган. Усулнинг яқинлашиш баҳоси яратилган итерацион схемада ҳосил бўлган интервал матрицанинг спектрал радиуси асосида олинган.

РЕЗЮМЕ. В статье рассматривается итерационный метод обратной матрицы для расчёта установившихся режимов электроэнергетических систем в условиях, что параметры рассматриваемой сети имеет интервальный неопределённость. Исследован вопрос о сходимости предлагаемого метода в пространстве интервальных комплексных чисел. Оценка сходимости получена на основе спектрального радиуса интервальной матрицы, образовавшегося в результате созданной итерационной схеме.

SUMMARY. The article discusses the iterative method of the inverse matrix for calculating the steady state modes of electric power systems under the conditions that the parameters of the network under consideration have an interval uncertainty. The issue of convergence of the proposed method in the space of interval complex numbers is investigated. The convergence estimate was obtained on the basis of the spectral radius of the interval matrix resulting from the created iterative scheme.

УДК 621.315.592

ВЛИЯНИЕ ЛЕГИРОВАНИЯ НИКЕЛЕМ И МАРГАНЦЕМ НА КОНЦЕНТРАЦИЮ КИСЛОРОДА В КРЕМНИИ

Х.М.Иллев – доктор физико-математических наук, профессор
Ташкентский государственный технический университет

М.О.Турсунов – преподаватель
Термезский государственный университет

С.Б.Исамов – доктор философии физико-математических наук, доцент
Ташкентский государственный технический университет

С.В.Ковешников – старший преподаватель
Ташкентский государственный технический университет

Таянч сўзлар: монокристалл, кремний, диффузия, никель, марганец, Фурье-спектрометр.

Ключевые слова: монокристалл, кремний, диффузия, никель, марганец, Фурье-спектрометр.

Key words: monocrystal, silicon, diffusion, nickel, manganese, Fure-spectrometer.

Введение: Как известно [1], количество термических и радиационных дефектов в кремнии в основном определяется концентрацией оптически активного кислорода. Поэтому управление концентрацией такого кислорода представляет большой технологический интерес. Изучение процесса геттерирования кислорода никелем является особенно актуальным, так как атомы никеля в кремнии имеют достаточно высокую растворимость $N \sim 10^{18} \text{ см}^{-3}$, сравнимую с кислородом, и в основном находятся электронеутральном состоянии [2].

$\lambda \geq 1$ неверно, т.е. $\rho(|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{D}_2^{(k)}|) < 1$, что и требовалось доказать.

Закключение. Отсутствие достаточно полной информационной базы, делает невозможным применение существующих методов расчёта установившихся режимов ЭЭС для их применения. При этом одновременность измерений, использование приборов определённого класса точности, а также использование при расчётах паспортных данных параметров элементов ЭС вносит неопределённость в проводимые расчёты и тем самым снижает их достоверность. В подобных ситуациях для решения задач расчёта режима и потерь ЭЭ целесообразно использование методов интервального анализа, которые позволяют определять возможные границы изменения параметров при учёте интервальной неопределённости исходной информации. Полученные нами результаты имеют как теоретическое, так и практическое значение для проведения расчетов по интервальному методу обратной матрицы.

Метод исследования: в качестве исходного материала был использован монокристаллический кремний р-типа с $\rho=3 \text{ Ом}\cdot\text{см}$, $\rho=5 \text{ Ом}\cdot\text{см}$ и п-типа с $\rho=100 \text{ Ом}\cdot\text{см}$, полученный методом Чохральского. В этих образцах концентрация оптически активного кислорода составляла $N_{O_2}=(5\div 6)\cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$. Плотность дислокаций - $S=10^3 \text{ см}^{-2}$. Размеры образцов $1\times 4\times 0.8 \text{ мм}^3$. После изготовления образцов, они подвергались механической шлифовке и полировке (алмазная паста 0.5 мкм), а затем очистке растворителями и химическому