

TÁBIYIY HÁM TEXNIKALÍQ ILIMLER

Fizika. Matematika. Texnika. Informatika.

QURAMALI FUNKCIYALARDIŇ ANIQ EMES INTEGRALIN TABIW USILLARI

N.Djumabaev - pedagogika ilimleriniń kandidati, docent
Ajiniyaz atındaǵı Nókis mámleketlik pedagogikalıq instituti

Tayansh soʻzlar: murakkab funksiya, noaniq integral, qismlar bo'yicha integrallash.

Ключевые слова: сложная функция, неопределенный интеграл, интегрирование по частям.

Key words: complex function, indefinite integral, integration by parts.

«Matematika oqıtıw metodikası» páninen ámeliy sabaq waqtında ayırım studentlerdiń quramalı funksiylardıń anıq emes integralın tabıwda kóp qáteliklerge jol qoyatuǵını kórinip turadı. Studentlerge metodikalıq járdem beriw maqsetinde quramalı funksiylardıń anıq emes integralın tabıwǵa bir neshe mısallar kórsetiwdi maqul taptıq:

1-mısal. Anıq emes integraldı tabıń: $\int \cos(\ln x) dx$

Sheshiw. Berilgen integraldı tabıwda bóleklep integrallaw usılınan paydalanamız: $\int f(x) dx = uv - \int v du$

$$u = \cos(\ln x) \Rightarrow du = -\frac{\sin(\ln x)}{x} dx; \quad \int dx = \int dv \Rightarrow v = x$$

$$\int \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) - \int x \cdot \left(-\frac{\sin(\ln x)}{x}\right) dx =$$

$$= x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx \quad (1)$$

Endi $\int \sin(\ln x) dx$ integralın tabamız hám bul integraldı tabıwda da bóleklep integrallaw usılınan paydalanamız:

$$u = \sin(\ln x) \Rightarrow du = \frac{\cos(\ln x)}{x} dx; \quad \int dx = \int dv \Rightarrow v = x$$

$$\int \sin(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - \int x \cdot \frac{\cos(\ln x)}{x} dx =$$

$$= x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx \quad (2)$$

(2) - nu (1) - ge qoyamız:

$$\int \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) -$$

$$- \int \cos(\ln x) dx \Rightarrow 2 \int \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \cos(\ln x) dx = \frac{x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x)}{2} + C;$$

2-mısal. Anıq emes integraldı tabıń: $\int \arctg \sqrt{x} dx$

Sheshiw. Berilgen integraldı tabıwda bóleklep integrallaw usılınan paydalanamız: $\int f(x) dx = uv - \int v du$

$$u = \arctg \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x}}; \quad \int dx = \int dv \Rightarrow v = x$$

$$\int \arctg \sqrt{x} dx = x \cdot \arctg \sqrt{x} - \int \frac{xdx}{2\sqrt{x}(1+x)} = x \cdot \arctg \sqrt{x} - \frac{1}{2} \int \frac{xdx}{\sqrt{x}(1+x)}$$

Endi $\int \frac{xdx}{\sqrt{x}(1+x)}$ (1) integralın sheshemiz:

Bul integraldı sheshiw ushın $\sqrt{x} = t$ dep belgileymiz, son-da

$x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt$ boladı. Bul tabılǵanlardı (1) - ge qoyamız:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x}(1+x)} = \int \frac{t \cdot 2t}{1+t^2} dt = 2 \int \frac{t^2}{1+t^2} dt = 2 \left(\int \frac{1+t^2-1}{1+t^2} dt \right) =$$

$$= 2 \left(\int \frac{1+t^2}{1+t^2} dt - \int \frac{dt}{1+t^2} \right) = 2t - 2 \arctg t + C = 2\sqrt{x} - 2 \arctg \sqrt{x} + C;$$

Olay bolsa, berilgen integraldıń sheshimi tómendegishe boladı:

$$\int \arctg \sqrt{x} dx = x \cdot \arctg \sqrt{x} - \frac{1}{2} \int \frac{xdx}{\sqrt{x}(1+x)} =$$

$$= x \cdot \arctg \sqrt{x} - \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{x} + \frac{1}{2} \cdot 2 \arctg \sqrt{x} + C =$$

$$= x \cdot \arctg \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctg \sqrt{x} + C =$$

$$= (x+1) \arctg \sqrt{x} - \sqrt{x} + C;$$

3-mısal. Anıq emes integraldı tabıń: $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$

Sheshiw. Berilgen integraldı tómendegishe turlendiremiz:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^4 x} \right) dx = \int \left(tg^2 x \cdot \frac{1}{\cos^4 x} \right) dx =$$

$$= \int tg^2 x \cdot (1+tg^2 x)^2 dx$$

Keyingi integraldı sheshiwde jańa belgilew kirgiziw arqalı tómendegishe jazamız:

$$tg x = t \Rightarrow x = \arctg t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\int tg^2 x \cdot (1+tg^2 x)^2 dx = \int t^2 \cdot (1+t^2)^2 \cdot \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int t^2 \cdot (1+t^2) \cdot dt = \int t^2 dt + \int t^4 dt =$$

$$= \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5 + C = \frac{1}{3} tg^3 x + \frac{1}{5} tg^5 x + C;$$

4-mısal. Anıq emes integraldı tabıń: $\int \frac{dx}{x^4+1}$

Sheshiw. Berilgen integral astındaǵı bólshektiń bólimin tómendegishe kóbeytiwshilerge jikleyemiz:

$$x^4+1 = x^4+2x^2+1-2x^2 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 =$$

$$= (x^2+1+\sqrt{2}x)(x^2+1-\sqrt{2}x) = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1);$$

Integral astındaǵı funksiyanı anıq emes koefficientler usılınan paydalanıp tómendegishe turlendiremiz:

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1}$$

Bul birdeylikti tómendegishe jazıp turlendiremiz:

$$1 = (Ax+B)(x^2-x\sqrt{2}+1) + (Cx+D)(x^2+x\sqrt{2}+1) =$$

$$= Ax^3 - Ax^2\sqrt{2} + Ax + Bx^2 - Bx\sqrt{2} + B + Cx^3 + Cx^2\sqrt{2} +$$

$$+ Cx + Dx^2 + Dx\sqrt{2} + D =$$

$$= (A+C)x^3 + (-A\sqrt{2}+B+C\sqrt{2}+D)x^2 +$$

$$+ (A-B\sqrt{2}+C+D\sqrt{2})x + (B+D);$$

Bul teńliktiń koefficientlerin teńlestiriw arqalı tómendegi teńlemeler sistemasın payda etemiz hám onı sheshemiz:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D=0 \\ A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D=0 \\ B+D=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-C \\ \sqrt{2}C+B+\sqrt{2}C+D=0 \\ -C-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D=0 \\ B+D=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=-C \\ 2\sqrt{2}C+B+D=0 \\ -\sqrt{2}B+\sqrt{2}D=0 \\ D=1-B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-C \\ -2\sqrt{2}C=1 \\ -\sqrt{2}B=-\sqrt{2}D \\ D=1-B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-C \\ -C=\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ B=D \\ 2D=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=-C=\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ D=\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1} \quad \text{birdeyligine}$$

A,V,S,D háripleriniń mánislerin qoysaq, onda tómendegi birdeylikke iye bolamız:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^4+1} &= \frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} - \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x-\frac{1}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{x+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} - \\ & - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \\ & + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2+x\sqrt{2}+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2-x\sqrt{2}+1}; \end{aligned}$$

Endi berilgen integraldı tómendegishe tabamız:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4+1} &= \int \frac{1}{x^4+1} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2+x\sqrt{2}+1} - \\ & - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2-x\sqrt{2}+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{d(x^2+x\sqrt{2}+1)}{x^2+x\sqrt{2}+1} - \\ & - \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{d(x^2-x\sqrt{2}+1)}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} = \\ & = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{2}{4\sqrt{2}} \int \frac{d(x\sqrt{2}+1)}{(x\sqrt{2}+1)^2+1} + \frac{2}{4\sqrt{2}} \int \frac{d(x\sqrt{2}-1)}{(x\sqrt{2}-1)^2+1} = \\ & = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctg(x\sqrt{2}+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctg(x\sqrt{2}-1) + C; \end{aligned}$$

Адебиеттер

1. Гусак А.А. Пособие к решению задач по высшей математике – Минск: Издательство БГУ, 2008.
2. Вилинкин Н.Я., Бохан К.А. Задачник по курсу математического анализа. – Москва: «Просвещение», 2010.

REZYUME. Ushbu maqolada murakkab funksiyalarning noaniq integrallarini topish usullari ko'rsatilgan.

РЕЗЮМЕ. В статье приведены различные методы неопределённых интегрированных сложных функций.

SUMMARY. The article presents various methods of indefinite integration of complex functions.

ПРОБЛЕМА СХОДИМОСТИ ИНТЕРВАЛЬНОГО МЕТОДА ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ ДЛЯ РАСЧЕТА УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.А.Ибрагимов – кандидат физико-математических наук, доцент

Д.Н.Хамроева – старший преподаватель

Т.Т.Мамуров – базовый докторант

Навоийский государственный педагогический институт

Таянч сўзлар: электр тармоқлари, электр тизимларининг ночизикли турғун ҳолат тенгламалари, интервал таҳлил, комплекс интервал сонлар тўплами, спектрал радиус.

Ключевые слова: электрические сети, нелинейные уравнения установившихся режимов электрических систем, интервальный анализ, комплексное множество интервальных чисел, спектральный радиус.

Key words: electrical networks, non-linear steady state equations of electrical systems, interval analysis, complex set of interval numbers, spectral radius.

Введение. Расчеты установившихся режимов являются основной задачей проектирования и эксплуатации электрических сетей (ЭС) [1]. Результаты этих расчетов используются при планировании режимов и оперативном управлении, а также служат базой для выполнения оптимизации, анализа устойчивости и надежности. Большинство разработанных и используемых в настоящее время методов для расчёта режимов и потерь электроэнергии (ЭЭ) в сетях всех ступеней напряжения основаны на детерминированном представлении исходной информации, т.е. используют те или иные допущения. Фактически, имеющаяся исходная информация для расчетов обладает неопределённостью, иными словами являются неполной или ограниченно достоверной. Проблема неопределённости исходных данных в полной мере относится к электроэнергетическим системам (ЭЭС). Параметры элементов ЭЭС в большинстве случаев определяются по паспортным, проектным или справочным данным, основываются на значительном количестве допущений, и считаются неизменными или слабо меняющимися. В тоже время известно, что параметры линий электропередачи,

трансформаторов, реакторов (особенно управляемых), средств компенсации реактивной мощности зависят от многих факторов и могут претерпевать ощутимые изменения в процессе эксплуатации. Применение детерминированных или вероятностно-статистических методов для расчёта режимов и потерь ЭЭ не учитывает указанные выше особенности исходной информации. Результаты расчётов, получаемые в виде детерминированных значений также не отражают возможные диапазоны изменения режимных переменных. Применение же вероятностно-статистических методов требует получения большого объёма статистических данных и построения сложных моделей, что само по себе вызывает известную неопределённость. Интервальный подход позволяет внести математическую строгость в построение численных алгоритмов, учитывающих интервальную неопределённость значений параметров режима ЭС [2].

Предварительные факты и обозначения. В дальнейшем изложении мы используем обозначения из проекта неформального международного стандарта [4] для интервальных величин, разработанную ведущими специалистами в области интервального анализа. В