

МНОГОМЕРНАЯ ГРАНИЧНАЯ ТЕОРЕМА МОРЕРА В КЛАССИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ПЕРВОГО ТИПА

Б.П.Отемуратов – доктор физико–математических наук

Нукусский государственный педагогический институт имени Ажинияза

Д.Х.Джумабаев – доктор-физико-математических наук

Университет геологических наук

Б.Ж.Кутлымуратов – базовый докторант

Нукусский государственный педагогический институт имени Ажинияза

Таянч сўзлар: биринчи тип классик соҳа, Шилов чегараси, нормаланган Лебег ўлчови, автоморфизмлар, аналитик диск, Пуассон ядроси

Ключевые слова: классическая область первого типа, граница Шилова, нормированная мера Лебега, автоморфизмы, аналитический диск, ядро Пуассона

Key words: classical domain of the first type, Shilov bound, normalized Lebesgue measure, automorphisms, analytic disk, Poisson core

Пусть дана классическая область первого типа, т.е. область D_I , образованная матрицами Z из m строк и n столбцов (элементы матриц – комплексные числа), удовлетворяющих условию

$$I^{(m)} - ZZ^* > 0,$$

а ее граница Шилова S_I образована матрицами U из m строк и n столбцов с условием, что

$$UU^* = I^{(m)}.$$

В частности, при $m=n$ многообразие S_I совпадает с множеством всех унитарных матриц $U(n)$. Определим класс $H^p(D_I)$ как класс всех функций F , голоморфных в D_I , для которых

$$\sup_{0 < r < 1} \int_S |F(r\zeta)|^p d\mu < +\infty,$$

здесь $r\zeta = (r\zeta_1, \dots, r\zeta_N)$, а $d\mu$ – нормированная мера Лебега на многообразии S_I , которая является мерой Хаара и, следовательно, инвариантна относительно поворотов.

Для любой функции f в D_I , и для любого $\zeta \in S_I$ рассмотрим срез-функцию f_ζ в $\Delta = \{t \in \mathbb{C} : |t| < 1\}$ следующего вида: $f_\zeta(t) = f(t\zeta)$. Эта срез-функция дает возможность связать некоторые N -мерные свойства функции f с одномерными свойствами f_ζ .

Зафиксируем точку $\lambda_0 \in S_I$ ($\lambda_0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_N^0)$) и рассмотрим следующее вложение диска Δ в область D_I

$$\{\zeta \in \mathbb{C}^N : \zeta_j = t\lambda_j^0, j=1, \dots, N, |t| < 1\} \quad (1)$$

Граница T диска Δ при этом вложении перейдет в окружность, лежащую на остова S_I . Если ψ – произвольный автоморфизм области D_I (т.е. биголморфное отображение области D_I на себя), то множество вида (1) под действием этого автоморфизма перейдет в некоторый аналитический диск с границей на S_I .

Параметризируем многообразие S_I следующим образом

$$\zeta = t\lambda, t = e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \lambda = S',$$

если $\zeta \in S_I$. Для областей первого типа S' и $m=n$ это есть группа $SU(n)$ специальных унитарных матриц ([1]).

Рассмотрим функцию $f \in L^p(S_I)$, $p \geq 1$.

Лемма 1. Если функция $f \in L^p(S_I)$, то $f_\zeta \in L^p(\Delta)$

для почти всех $\zeta \in S_I$.

Доказательство. Пусть $f \in L^p(S_I)$. Элемент объема $d\mu$ многообразия S_I может быть записана в виде

$$d\mu = \frac{d\varphi}{2\pi} \wedge d\mu' = \frac{1}{2\pi i} \frac{dt}{t} \wedge d\mu',$$

где $d\mu'$ – дифференциальная форма, определяющая положительную меру на S' (см. [1]) и по теореме Фубини мы можем написать

$$\int_{S_I} |f(\zeta)|^p d\mu = \int_{S'} d\mu' \int_T |f(\lambda t)|^p \frac{dt}{t}.$$

Тогда для фиксированного $\lambda \in S'$ и функции

$$F(\lambda) = \int_T |f(\lambda t)|^p \frac{dt}{t}$$

имеем

$$\int_{S'} F(\lambda) d\mu' = \int_{S_I} |f(\zeta)|^p d\mu,$$

т.е., $F(\lambda)$ – ограничена для почти всех $\lambda \in S'$. Отсюда получаем доказательство леммы 1.

Обозначим через Δ_ψ аналитический диск вида

$$\Delta_\psi = \{\zeta : \zeta = \psi(t\lambda_0), |t| < 1\},$$

где λ_0 – фиксированная точка из остова S_I , а ψ – автоморфизм области D_I . Тогда граница T_ψ этого аналитического диска лежит на S_I .

На остова S_I транзитивно действует подгруппа автоморфизмов, оставляющих 0 неподвижной точкой. Мы их назовем унитарными преобразованиями, поскольку они линейны и для случая областей, состоящих из квадратных матриц, задаются унитарными матрицами. Тогда остова S_I инвариантен относительно унитарных преобразований.

Лемма 2. (см. [2]) Автоморфизмы ψ области D_I можно представить в виде $\psi = \psi_A \circ \varphi_\lambda$, где ψ_A – фиксированный автоморфизм, переводящий точку $A \in D_I$ в 0, φ_λ – унитарное преобразование для фиксированного $\lambda \in S_I$.

Поскольку автоморфизм области D_I является автоморфизмом замыкания области, то он служит диффеоморфизмом остова. Если $f \in L^p(S_I)$, то из равенства

$$f(\psi(\zeta))d\mu = \int_{S_I} f(W)d\mu(\psi^{-1}(\zeta)) = \int_{S_I} f(W)h(W)d\mu(W),$$

где $|h(\zeta)| \geq \delta > 0$, вытекает что, и функция $f(\psi(\zeta)) \in L^p(S_I)$.

Теорема 1. Если функция $f \in L^p(S_I)$, $p \geq 1$, удовлетворяет условию Морера

$$\int_T f(\psi(t\lambda))dt = 0 \quad (2)$$

для всех автоморфизмов $\psi = \psi_A$ и почти всех автоморфизмов $\psi = \varphi_\lambda$ области D_I , то функция f голоморфно продолжается в D_I до функции F класса $H^p(\bar{D}_I)$.

Доказательство. Умножая равенство (2) на $d\mu'$, и интегрируя по S' и учитывая, что

$$\int_{S'} d\mu' \int_T f(\psi(t\lambda))dt = \int_{S_I} f(\psi(\zeta))d\mu,$$

мы из (2) по лемме 2 получим

$$\int_{S_I} f(\psi(\zeta))\zeta_k d\mu(\zeta) = 0, \quad (3)$$

где ζ_k компоненты вектора ζ , $k=1,2,\dots,N$.

Рассмотрим автоморфизм ψ_A , переводящий точку A из D в 0 . Он определяется с точностью до унитарного преобразования.

Тогда подставляя в условие (3) вместо ψ автоморфизм ψ_A^{-1} и делая замену переменных $W = \psi_A^{-1}(\zeta)$, мы получим

$$\int_{S_I} f(W)\psi_k^A(W)d\mu(\psi_A(W)) = 0 \quad (4)$$

где ψ_k^A есть компоненты автоморфизма ψ_A .

Как показано в [3] (лемма 3.4) (для случая квадратных матриц см. доказательство теоремы 4.6.3 из [2])

$$d\mu(\psi_A(W)) = P(W,A)d\mu(W),$$

где $P(W,A)$ – инвариантное ядро Пуассона области D_I .

Таким образом, из условия (4) мы получаем окончательное соотношение

$$\int_{S_I} f(W)\psi_k^A(W)P(W,A)d\mu(W) = 0 \quad (5)$$

для всех точек A из D_I и всех $k=1,\dots,N$.

Но тогда, теорема 1 будет следовать из следующей теоремы А.М. Кытманова и Т.Н. Никитиной [1].

Теорема 2 Если функция $f \in L^p(S_I)$ и для нее выполнено равенство (5) для всех автоморфизмов ψ_A области D_I переводящих точку A из D_I в 0 , всех $k=1,\dots,N$, и всех точек $A \in D_I$ то функция f является радиальным граничным значением некоторой функции $F \in H^p(D_I)$.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 1 показывает, что оно остается верным, если условие (5) выполняется лишь для тех автоморфизмов ψ_A , для которых точка A лежит в некотором открытом множестве $V \subset D_I$. Чтобы убедиться в этом, достаточно применить теорему единственности для вещественно аналитических функций. Применяя, это обобщение теоремы 1, мы можем доказать

Теорема 3. Если функция $f \in L^p(S_I)$ удовлетворяет условию (5) для всех точек A , лежащих в некотором открытом множестве $V \subset D_I$ и всех компонент автоморфизмов $\psi = \psi_A$ и почти всех автоморфизмов $\psi = \varphi_\lambda$, то f является радиальным граничным значением на S_I некоторой функции $F \in H^p(D_I)$.

Доказательство. Предположим для определенности, что $m \leq n$. Инвариантное ядро Пуассона для области первого типа D_I имеет вид [2]

$$P(W,A) = \frac{(\det(I^{(m)} - AA^*))^n}{|\det(I^{(m)} - AW^*)|^{2n}} = \frac{(\det(I^{(m)} - AA^*))^n}{\det(I^{(m)} - AW^*)^n \det(I^{(m)} - WA^*)^n}.$$

Пусть $A = \|a_{sp}\|$ и $W = \|w_{sp}\|$, ($s=1,\dots,m$; $p=1,\dots,n$).

Найдем выражение

$$\sum_{s=1}^m \sum_{p=1}^n \bar{a}_{sp} \frac{\partial P(W,A)}{\partial \bar{a}_{sp}} \quad (6)$$

Для этого обозначим $I^{(m)} - WA^* = \|\alpha_{qj}\|$, ($q,j=1,\dots,m$), где

$$\alpha_{qj} = \delta_{qj} - \sum_{k=1}^n w_{qj} \bar{a}_{jk}, \quad q,j=1,\dots,m,$$

а δ_{qj} – символ Кронекера ($\delta_{qj} = 0$ при $q \neq j$, а $\delta_{qq} = 1$). Используя обычное правило дифференцирования определителя, нетрудно проверить, что для любого $s=1,\dots,m$

$$\sum_{p=1}^n \bar{a}_{sp} \frac{\partial \det(I^{(m)} - WA^*)}{\partial \bar{a}_{sp}} = \det(I^{(m)} - WA^*) - \det(I^{(m)} - WA^*)[s,s],$$

где $\det(I^{(m)} - WA^*)[s,s]$ означает алгебраическое дополнение к элементу α_{ss} в матрице $(I^{(m)} - WA^*)$. Тогда

$$\sum_{s=1}^m \sum_{p=1}^n \bar{a}_{sp} \frac{\partial \det(I^{(m)} - WA^*)}{\partial \bar{a}_{sp}} = m \det(I^{(m)} - WA^*) - \sum_{s=1}^m \det(I^{(m)} - WA^*)[s,s].$$

Точно так же

$$\sum_{s=1}^m \sum_{p=1}^n \bar{a}_{sp} \frac{\partial \det(I^{(m)} - AA^*)}{\partial \bar{a}_{sp}} = m \det(I^{(m)} - AA^*) - \sum_{s=1}^m \det(I^{(m)} - AA^*)[s,s].$$

Тем самым выражение (6) равно

$$\sum_{s=1}^m \sum_{p=1}^n \bar{a}_{sp} \frac{\partial P(W,A)}{\partial \bar{a}_{sp}} = mP(W,A) \times$$

$$\times \left[\frac{\sum_{s=1}^m \det(I^{(m)} - WA^*)[s, s]}{\det(I^{(m)} - WA^*)} - \frac{\sum_{s=1}^m \det(I^{(m)} - AA^*)[s, s]}{(I^{(m)} - AA^*)} \right] =$$

$$= mP(W, A) \left[Sp \det(I^{(m)} - WA^*)^{-1} - Sp \det(I^{(m)} - AA^*)^{-1} \right], \quad (7)$$

где SpW – след матрицы W .

Как известно, условия

$$I^{(m)} - ZZ^* > 0, I^{(n)} - ZZ^* = I^{(n)} - Z'(Z')^* > 0,$$

эквивалентны (см. [2], с. 37). Поэтому отображение $Z \rightarrow Z'$ переводит область D_I в область D'_I также первого типа.

Рассмотрим автоморфизм $\psi_{A'}$, переводящий точку $A' \in D'_I$ в $0'$, следующего вида

$$\psi_{A'}(W') = Q'(W' - A')(I^{(m)} - (A')^* W')^{-1} (R')^{-1}$$

(см. [2], с. 85), где невырожденные $n \times n$ –матрица Q' и $m \times m$ –матрица R' выбраны таким образом, что

$$R'(I^{(m)} - A'(A')^*)(R')^* = I^{(m)},$$

$$Q'(I^{(n)} - (A')^* A')(Q')^* = I^{(n)}.$$

Тогда автоморфизм $\psi_A(W)$ области D_I , переводящий точку $A \in D_I$ в 0 , будет иметь вид

$$\psi_A(W) = R^{-1}(I^{(m)} - WA^*)^{-1}(W - A)Q.$$

Если условие (5) выполнено, то для компонент отображения имеет место

$$\varphi_A(W) = (I^{(m)} - AA^*)^{-1}(I^{(m)} - WA^*)^{-1}(W - A),$$

так как матрицы $P, Q, (I^{(m)} - AA^*)$ не вырождены и

зависят только от A .

Обозначив компоненты отображения $\varphi_A(W)$ через $\varphi_{sp}^A(W)$, $s=1, \dots, m$; $p=1, \dots, n$, из (5) получим

$$\int_{S_I} f(W) \varphi_{sp}^A(W) P(W, A) d\mu(W) = 0 \quad (8)$$

Найдем сумму

$$\sum_{s=1}^m \sum_{p=1}^n \bar{a}_{sp} \varphi_{sp}^A = Sp(\varphi(W) A^*)$$

Для этого нам понадобится следующее свойство следа матрицы:

$$Sp(AB) = Sp(BA) \quad (9)$$

где прямоугольные матрицы A и B таковы, что определены произведения AB и BA . Действительно, если $m \times n$ –матрица A состоит из элементов a_{ks} ,

$k=1, \dots, m$, $s=1, \dots, n$ а $n \times m$ –матрица B состоит из элементов b_{lq} , $l=1, \dots, n$; $q=1, \dots, m$, то

$$Sp(AB) = \sum_{k=1}^m \sum_{s=1}^n a_{ks} b_{sk} = Sp(BA)$$

Используя вид отображения φ_A и свойство (9)

следа матрицы, получим

$$Sp(\varphi_A(W) A^*) = Sp[(I^{(m)} - AA^*)^{-1}(I^{(m)} - WA^*)^{-1}(W - A) A^*] =$$

$$= Sp[(I^{(m)} - AA^*)^{-1}(I^{(m)} - WA^*)^{-1}((WA^* - I^{(m)}) + (I^{(m)} - AA^*))] =$$

$$Sp[(I^{(m)} - WA^*)^{-1} - (I^{(m)} - AA^*)^{-1}] \quad (10)$$

Сравнивая формулы (7) и (10), из условия (8) получим

$$\sum_{s=1}^m \sum_{p=1}^n \bar{a}_{sp} \frac{\partial F(A)}{\partial \bar{a}_{sp}} = 0 \quad (11)$$

и

$$F(A) = \int_{S_I} f(W) P(W, A) d\mu(W)$$

– интеграл Пуассона от функции $f \in L^p(S_I)$.

Функция $F(A)$ является вещественно аналитической в области D_I . Разложим ее в ряд Тейлора в окрестности точки 0 :

$$F(A) = \sum_{|\alpha|, |\beta| \geq 0} c_{\alpha, \beta} a^\alpha \bar{a}^\beta$$

где $\alpha = \|\alpha_{qj}\|$, и $\beta = \|\beta_{qj}\|$, $q=1, \dots, m$, $j=1, \dots, n$ –матрицы с неотрицательными целочисленными элементами,

$$|\alpha| = \sum_{q=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{qj}, \quad a^\alpha = \prod_{q=1}^m \prod_{j=1}^n a_{qj}^{\alpha_{qj}}.$$

Тогда имея ввиду (11), имеем

$$\sum_{s=1}^m \sum_{p=1}^n \bar{a}_{sp} \frac{\partial F(A)}{\partial \bar{a}_{sp}} = \sum_{|\alpha| \geq 0, |\beta| > 0} |\beta| c_{\alpha, \beta} a^\alpha \bar{a}^\beta = 0$$

откуда следует, что все коэффициенты $c_{\alpha, \beta} = 0$ с $|\beta| > 0$. Откуда и вытекает доказательство теоремы.

Из теоремы 2 и 3 вытекает следующее

Следствие. Если функция $f \in L^p(S)$ голоморфно (по t) продолжается в аналитические диски Δ_ψ для всех автоморфизмов ψ (либо для всех автоморфизмов ψ , переводящих точку 0 в точки некоторого фиксированного открытого множества $V \subset D_I$) до функций класса $H^p(\Delta_\psi)$, то функция f голоморфно продолжается в D_I .

Литература

1. Кытманов А.М., Никитина Т.Н. Аналоги формулы Карлемана для классических областей. // Математические заметки. 1989. Т. 45, вып. 3. -С. 87-93.
2. Хуа Локен Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. // М.: ИЛ, 1959.
3. Koranyi A. The Poisson integral for generalized half-planes and bounded symmetric domains. // Ann. Math. 1965. V. 82, №2. -P. 332-350.

Ушбу мақолада биринчи тип классик соҳа учун Морера теоремасининг умумлашмалари олинган.

В данной статье получены граничные варианты теоремы Морера для классических областей первого типа.

In this article are obtained boundary variants of Morera's theorem for classical domains of the first type.

РЕЗЮМЕ

РЕЗЮМЕ

SUMMARY