

TÁBIYIY HÁM TEXNIKALÍQ ILIMLER

ЛОКАЛЬНЫЕ ВНУТРЕННИЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ ФИЛИФОРМНЫХ НЕ ЛИЕВЫХ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА

А.К.Алаудинов – доктор философии по физико-математическим наукам
Каракалпакский государственный университет имени Бердаха

Институт математики имени В.И.Романовского Академии наук Узбекистана

З.Ж.Султанова - магистрант

Каракалпакский государственный университет имени Бердаха

Tayanch soʻzlar: Libnits algebrasi, differensiallash, ichki differensiallash, lokal ichki differensiallash.

Ключевые слова: алгебра Лейбница, дифференцирование, внутреннее дифференцирование, локальное внутреннее дифференцирование.

Key words: Leibniz algebras, derivation, inner derivation, local inner derivation.

1. Введение. Л.Молнар [15] ввел определение локальных внутренних дифференцирований на стандартных операторных алгебрах.

Локальные и 2-локальные дифференцирования над простыми алгебрами Лейбница, над нильпотентными алгебрами Лейбница изучено в работе [5]. Кроме этого в работе [13] рассмотрено локальные и 2-локальные дифференцирования некоторых полупростых алгебр Лейбница.

Почти внутренние дифференцирования алгебр Ли были введены К.С.Гордоном и Е.Н.Уилсоном [10] в изучении изоспектральных деформаций компактных многообразий. Почти внутренние дифференцирования нильпотентных, некоторых разрешимых алгебр Ли и некоторых нильпотентных алгебр Лейбница изучались в работах [8] и [1].

2. Предварительные сведения. Для начала напомним определение алгебр Лейбница.

Определение 2.1. Алгебра L над полем F называется алгеброй Лейбница, если для любых $x, y, z \in L$ выполняется тождество Лейбница:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y],$$

где $[,]$ – умножение в L .

Для произвольной алгебры Лейбница L определим последовательность:

$$L^1 = L, L^{k+1} = [L^k, L^1], k \geq 1.$$

Алгебра Лейбница L размерности n , называется *филиформной*, если $\dim L^i = n - i, 2 \leq i \leq n-1$.

Теорема 2.1 [7]. В любой n -мерной комплексной филиформной алгебре Лейбница существует базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ такой, что её умножение в этом базисе имеет один из следующих видов:

$$F^1(\alpha_4, \dots, \alpha_n, \theta):$$

$$[e_1, e_1] = e_3, [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n-1,$$

$$[e_1, e_2] = \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5 + \dots + \alpha_{n-1} e_{n-1} + \theta e_n,$$

$$[e_j, e_2] = \alpha_4 e_{j+2} + \alpha_5 e_{j+3} + \dots + \alpha_{n+2-j} e_n, \quad 2 \leq j \leq n-2,$$

$$F^2(\beta_4, \dots, \beta_n, \gamma):$$

$$[e_1, e_1] = e_3, [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 3 \leq i \leq n-1,$$

$$[e_2, e_3] = \beta_4 e_4 + \beta_5 e_5 + \dots + \beta_n e_n, [e_2, e_2] = \gamma e_n,$$

$$[e_j, e_2] = \beta_4 e_{j+2} + \beta_5 e_{j+3} + \dots + \beta_{n+2-j} e_n, \quad 3 \leq j \leq n-2,$$

Определение 2.2. Напомним, что линейный оператор $D: A \rightarrow A$ называется *дифференцированием алгебры Лейбница* A , если $D[x, y] = [D(x), y] + [x, D(y)]$ при всех $x, y \in A$ (правило Лейбница).

Определение 2.3. Для каждого $a \in L$ правое умножение $R_a(x) = [x, a], x \in L$ называется *внутренним дифференцированием*.

Определение 2.4. Линейное отображение $\Delta: A \rightarrow A$ называется *локальным внутренним дифференцированием*

алгебры Лейбница, если для каждого $x \in A$, существует внутреннее дифференцирование (зависящее от x) $R_x: A \rightarrow A$ такое, что $\Delta(x) = R_x(x)$.

Пусть L – четырехмерная филиформная не лиевая алгебра Лейбница:

$$F^1(\alpha_4, \theta):$$

$$[e_1, e_1] = e_3, [e_2, e_1] = e_3, [e_3, e_1] = e_4,$$

$$[e_1, e_2] = \theta e_4, [e_2, e_2] = \alpha_4 e_4$$

$$F^2(\beta_4, \gamma):$$

$$[e_1, e_1] = e_3, [e_3, e_1] = e_4,$$

$$[e_2, e_3] = \beta_4 e_4, [e_2, e_2] = \gamma e_4,$$

3. Основные результаты. В этом разделе мы рассмотрим локальные внутренние дифференцирования четырехмерных филиформных не лиевых алгебр Лейбница.

Следующая теорема является основным результатом работы.

Теорема 3.1. Всякое локальное внутреннее дифференцирование алгебры $F^1(\alpha_4, \theta)$ кроме случая $\alpha_4 = \theta \neq 0$ является внутренним дифференцированием. В случае $\alpha_4 = \theta \neq 0$ на алгебре $F^1(\alpha_4, \theta)$ существует локальное внутреннее дифференцирование которое не является внутренним дифференцированием.

Доказательство. Пусть $R_a(x)$ внутреннее дифференцирование алгебры $F^1(\alpha_4, \theta)$, где $x = \sum_{i=1}^4 x_i e_i, a = \sum_{i=1}^4 a_i e_i \in F^1(\alpha_4, \theta)$. Тогда

$$R_a(x) = [x, a] = (a_1 x_1 + a_1 x_2) e_3 + (a_2 \theta x_1 + a_2 \alpha_4 x_2 + a_1 x_3) e_4.$$

Пусть $\Delta: F^1(\alpha_4, \theta) \rightarrow F^1(\alpha_4, \theta)$ локальное внутреннее дифференцирование. По определению локального внутреннего дифференцирования для каждого $x \in F^1(\alpha_4, \theta)$ существует внутреннее дифференцирование $R_{a_x}(x)$ такое, что $\Delta(x) = R_{a_x}(x)$.

Рассмотрим следующие равенства:

$$\Delta(e_1) = R_{a^{(e_1)}} = [x, a^{(e_1)}] = a_1^{(e_1)} e_3 + a_2^{(e_1)} \theta e_4,$$

$$\Delta(e_2) = R_{a^{(e_2)}} = [x, a^{(e_2)}] = a_1^{(e_2)} e_3 + a_2^{(e_2)} \alpha_4 e_4,$$

$$\Delta(e_3) = R_{a^{(e_3)}} = [x, a^{(e_3)}] = a_1^{(e_3)} e_4,$$

$$\Delta(e_1 - e_2) = [x, a^{(e_1 - e_2)}] = a_2^{(e_1 - e_2)} (\theta - \alpha_4) e_4$$

с другой стороны

$$\begin{aligned}\Delta(e_1 - e_2) &= \Delta(e_1) - \Delta(e_2) = \\ &= (a_1^{(e_1)} - a_1^{(e_2)})e_3 + (a_2^{(e_1)}\theta - a_2^{(e_2)}\alpha_4)e_4.\end{aligned}$$

В последних в двух равенствах сопоставив коэффициенты перед e_3 получим $a_1^{(e_1)} = a_1^{(e_2)}$.

Случай 3.1. $\alpha_4\theta \neq 0$.

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha_4 e_1 - \theta e_2) &= [x, a^{(\alpha_4 e_1 - \theta e_2)}] = a_1^{(\alpha_4 e_1 - \theta e_2)}(\alpha_4 - \theta)e_3 \\ \text{с другой стороны} \quad \Delta(\alpha_4 e_1 - \theta e_2) &= \alpha_4 \Delta(e_1) - \theta \Delta(e_2) = \\ &= (a_1^{(e_1)}\alpha_4 - a_1^{(e_2)}\theta)e_3 + \alpha_4\theta(a_2^{(e_1)} - a_2^{(e_2)})e_4.\end{aligned}$$

Сопоставляя коэффициенты перед e_4 имеем, что $a_2^{(e_1)} = a_2^{(e_2)}$.

Случай 3.1.1. $\alpha_4 \neq \theta$.

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha_4 e_1 - \theta e_2 + e_3) &= [x, a^{(\alpha_4 e_1 - \theta e_2 + e_3)}] = \\ &= a_1^{(\alpha_4 e_1 - \theta e_2 + e_3)}(\alpha_4 - \theta)e_3 + a_1^{(\alpha_4 e_1 - \theta e_2 + e_3)}e_4\end{aligned}$$

с другой стороны

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha_4 e_1 - \theta e_2 + e_3) &= \alpha_4 \Delta(e_1) - \theta \Delta(e_2) + \Delta(e_3) = \\ &= a_1^{(e_1)}(\alpha_4 - \theta)e_3 + a_1^{(e_3)}e_4.\end{aligned}$$

Тогда $a_1^{(e_3)} = a_1^{(e_1)}$. $\Delta(x) = [x, a_1^{(e_1)}e_1 + a_2^{(e_1)}e_2]$.

Случай 3.1.2. $\alpha_4 = \theta$.

В этом случае существует локальное внутреннее дифференцирование которое не является внутренним дифференцированием. Оператор $\Delta(x) = x_3 e_4$ не является внутренним дифференцированием. Предположим обратное, пусть $\Delta(x) = R_a(x)$. Для элемента $y = e_1 - e_2 + e_3$ получаем равенства $\Delta(y) = e_4$ и $R_a(y) = a_1 e_4$. Из этих равенств находим, что $a_1 = 1$. Тогда $R_a(x) = (x_1 + x_2)e_3 + (a_2\theta x_1 + a_2\alpha_4 x_2 + x_3)e_4$

$$\Delta(x) \neq R_a(x),$$

это противоречит, что $\Delta(x) = x_3 e_4$ внутреннее дифференцирование.

Тепер покажем, что Δ является локальным внутренним дифференцированием. Для всякого $x \in F^1(\alpha_4, \theta)$ верна

$$\Delta(x) = [x, \varphi(x)],$$

где

$$\varphi(x) = \begin{cases} x_3 e_1, & \text{если } x_1 + x_2 = 0, \\ \frac{x_3}{x_1 + x_2} e_2, & \text{если } x_1 + x_2 \neq 0. \end{cases}$$

Случай 3.2. $\alpha_4\theta = 0$.

Если $\alpha_4 = 0$, тогда

$\Delta(e_2 + e_3) = [x, a^{(e_2 + e_3)}] = a_1^{(e_2 + e_3)}e_3 + a_1^{(e_2 + e_3)}e_4$ с другой стороны $\Delta(e_2 + e_3) = \Delta(e_2) + \Delta(e_3) = a_1^{(e_1)}e_3 + a_1^{(e_3)}e_4$, из этих двух равенств получим $a_1^{(e_3)} = a_1^{(e_1)}$.

$$\Delta(x) = [x, a_1^{(e_1)}e_1 + a_2^{(e_1)}e_2].$$

Если $\theta = 0$, тогда аналогичным образом получим, что $a_1^{(e_3)} = a_1^{(e_1)}$. $\Delta(x) = [x, a_1^{(e_1)}e_1 + a_2^{(e_2)}e_2]$.

Теорема 3.2. Всякое локальное внутреннее дифференцирование алгебры $F^2(\beta_4, \gamma)$ является внутренним дифференцированием.

Доказательство. Пусть $R_a(x)$ внутреннее дифференцирование алгебры $F^2(\beta_4, \gamma)$, где

$$x = \sum_{i=1}^4 x_i e_i, a = \sum_{i=1}^4 a_i e_i \in F^2(\beta_4, \gamma). \text{ Тогда}$$

$$R_a(x) = [x, a] = a_1 x_1 e_3 + ((a_2 \gamma + a_3 \beta_4) x_2 + a_1 x_3) e_4.$$

По определению локального внутреннего дифференцирования для каждого $x \in F^2(\beta_4, \gamma)$ существует внутреннее дифференцирование $R_{a_x}(x)$ такое, что $\Delta(x) = R_{a_x}(x)$.

Рассмотрим следующие равенства:

$$\Delta(e_1) = R_{a^{(e_1)}} = [x, a^{(e_1)}] = a_1^{(e_1)}e_3,$$

$$\Delta(e_2) = R_{a^{(e_2)}} = [x, a^{(e_2)}] = (a_2^{(e_2)}\gamma + a_3^{(e_2)}\beta_4)e_4,$$

$$\Delta(e_3) = R_{a^{(e_3)}} = [x, a^{(e_3)}] = a_1^{(e_3)}e_4,$$

$$\Delta(e_1 + e_3) = [x, a^{(e_1 + e_3)}] = a_1^{(e_1 + e_3)}e_3 + a_1^{(e_1 + e_3)}e_4,$$

с другой стороны

$$\Delta(e_1 + e_3) = \Delta(e_1) + \Delta(e_3) = e_3 + a_1^{(e_3)}e_4.$$

Сопоставив коэффициенты перед e_3 и e_4 находим,

что $a_1^{(e_1)} = a_1^{(e_3)}$, т.е. $\Delta(e_3) = a_1^{(e_1)}e_4$. Тогда

$$\Delta(x) = [x, a_1^{(e_1)}e_1 + a_2^{(e_2)}e_2 + a_3^{(e_2)}e_3]. \text{ Это означает, что}$$

Δ является внутренним дифференцированием.

Литература

1. Adashev J.K., Kurbanbaev T.K. Almost Inner Derivations of some Nilpotent Leibniz Algebras, Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2020, 13(6), -P.1–13.
2. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K., Local derivations on finite-dimensional Lie algebras // Linear Algebra and its Applications. 493 (2016), -P. 381–398.
3. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K. 2-Local automorphisms on finite-dimensional Lie algebras // Linear Algebra and its Applications. 507 (2016), -P. 121–131.
4. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K. Local Automorphisms on Finite-Dimensional Lie and Leibniz Algebras // Algebra, Complex Analysis and Pluripotential Theory, USUZCAMP 2017. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 264 (2017), -P. 31–44.
5. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K., Omirov B.A. Local and 2-local derivations and automorphisms on simple Leibniz algebras, Bulletin of the Malaysian Mathematical Society Series 2 43(2), DOI: 10.1007/s40840-019-00799.
6. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K., Rakhimov I.S. 2-Local derivations on finite-dimensional Lie algebras // Linear Algebra and its Applications. 474. 2015, -P. 1–11.

7. Ayupov Sh.A., Omirov B.A. On some classes of nilpotent Leibniz algebras // *Sibirsk. Mat. Zh.* (in Russian). 2001. V. 42 (1). – P. 18–29 (English translation in *Siberian Math. J.*, 2001. V. 42(1). – P. 15–24.
8. Burde D., Dekimpe K., Verbeke B. Almost inner derivations of Lie algebras. *Journal of Algebra and Its Applications*, 17 (2018), no. –P. 11, 26.
9. Chen Z., Wang D. 2-Local automorphisms of finite-dimensional simple Lie algebras. // *Linear Algebra and its Applications*. 486 (2015), -P. 335–344.
10. Gordon C.S., Wilson E.N. Isospectral deformations of compact solvmanifolds. *J. Differential Geom.* 19 (1984), no. 1, -P. 214–256.
11. Jacobson N. *Lie algebras*, Inter science Publishers, Wiley, -New York: 1962.
12. Kadison R.V. Local derivations, *J. Algebra*, 130. 1990, -P. 494–509.
13. Kurbanbaev T.K. Local and 2-local derivations some semi simple Leibniz algebras, *Uzbek Mathematical Journal*, 2019, №3, pp.76–84, DOI: 10.29229/uzmj. 2019, -P.3–9.
14. Larson D.R., Sourour A.R. Local derivations and local automorphisms of $B(X)$, *Proc. Sympos. Pure Math.* 51. 1990, -P. 187–194.
15. Molnár L. Locally inner derivations of standard operator algebras. (English). *Mathematica Bohemica*, vol. 121. 1996, issue 1, -P. 1–7.

РЕЗЮМЕ

Mazkur maqolada to'rt o'lchamli Li bo'lmagan filiform Leybnits algebralarining ichki lokal differensiallashlari o'rganilgan. $F^1(\alpha_4, \theta)$ algebrasining har bir lokal ichki differensiallashi ichki differensiallash ekanligi isbotlangan.

РЕЗЮМЕ

В статье изучены локальные внутренние дифференцирования четырехмерных филиформных не лиевых алгебр Лейбница. Доказано что, всякое локальное внутреннее дифференцирование алгебры $F^1(\alpha_4, \theta)$ кроме случая $\alpha_4 = \theta \neq 0$ является внутренним дифференцированием и в случае $\alpha_4 = \theta \neq 0$ на алгебре $F^1(\alpha_4, \theta)$ существует локальное внутреннее дифференцирование которое не является внутренним дифференцированием.

SUMMARY

In this article, local inner derivations are studied of four-dimensional filiform of non-Lie Leibniz algebras. It is proved that every local inner derivation of the algebra $F^1(\alpha_4, \theta)$ is an inner derivation.

LOCAL INNER DERIVATIONS ON THREE-DIMENSIONAL LIE ALGEBRAS

A.K.Alauadinov – *doctor of Philosophy in Physical and Mathematical Sciences*
Karakalpak state university name after Berdax

Ch.I.Jumaeva – *master*

V.I.Romanovskiy institute of Mathematics Uzbekistan Academy of Sciences

Tayanch so'zlar: Li algebras, differensiallash, ichki differensiallash, lokal ichki differensiallash.

Ключевые слова: алгебра Ли, дифференциация, внутренняя дифференциация, локальная внутренняя дифференциация.

Key words: Lie algebra, derivation, inner derivation, local derivation, local inner derivation.

1. Introductions. Currently, various types of derivations over algebras are being studied, for example, derivations, local derivations, 2-local derivations, almost inner derivations, etc. Local derivations were first considered in the work of R. Kadison in 1990 [10] and, independently in the work of D. Larson and A. Surur [11]. In these papers, some conditions are indicated under which local derivations is derivations. R.Kadison's paper considered local derivations on von Neumann algebras and in some polynomial algebras. L.Molnár [12] introduced the definition of local inner derivations on standard operator algebras.

The first results concern to local and 2-local derivations and automorphisms on finite-dimensional Lie algebras over algebraically closed field of zero characteristic were obtained in [2, 3, 5] and [7]. Namely, in [5] it is proved that every 2-local derivation on a semi-simple Lie algebra L is a derivation and that each finite-dimensional nilpotent Lie algebra with dimension larger than two admits 2-local derivation which is not a derivation. In [2] the authors have proved that every local derivation on a semi-simple Lie algebras is a derivation and gave examples of nilpotent finite-dimensional Lie algebras with local derivations which are not derivations. Concerning 2-local automorphism, Z.Chen and D.Wang in [7] prove that if L is a simple Lie algebra of type A_k , D_k or E_k , ($k = 6, 7, 8$) over an algebraically closed field of characteristic zero, then every 2-local automorphism of L is an automorphism. Finally, in [3] Sh.A.Ayupov and K.K.Kudaybergenov generalized this result of [7] and proved that every 2-local automorphism of a finite-dimensional semi-simple Lie algebra over an algebraically closed field of characteristic zero is an automorphism. Moreover, they show also that every nilpotent Lie algebra with finite-dimension larger than two admits 2-local automorphisms which is not an automorphism. Local automorphisms of certain finite-dimensional simple Lie and

Leibniz algebras are investigated in [4]. Almost inner derivations of Lie algebras were introduced by C.S. Gordon and E.N. Wilson [8] in the study of isospectral deformations of compact manifolds. Almost inner derivations of nilpotent, some solvable Lie algebras and some nilpotent Leibniz algebras were studied in the papers by [6] and [1].

2. Preliminaries. To begin with, recall the definition of Lie algebras.

Definition 2.1. An algebra L over field $\mathbb{F}$ is called a Lie algebra if its multiplication satisfies the identities:

- 1) $[x, x] = 0$,
- 2) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$,

for all x, y, z in L .

The product $[x, y]$ is called the bracket of x and y . Identity 2) is called the Jacobi identity.

Let L be a finite-dimensional Lie algebra. For Lie algebra L we consider the following central and derived series:

$$L^1 = L, \quad L^i = [L^{i-1}, L], \quad i \geq 1,$$

$$L^{[1]} = L, \quad L^{[k]} = [L^{[k-1]}, L^{[k-1]}], \quad k \geq 1.$$

A Lie algebra L is *nilpotent (solvable)* if there exists $m \geq 1$ such that $L^m = 0$ ($L^{[m]} = 0$).

Definition 2.2. A derivation on a Lie algebra L is a linear map $D: L \rightarrow L$ which satisfies the Leibniz rule:

$$D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)] \quad (2.1)$$