

TÁBIYIY HÁM TEXNIKALÍQ ILIMLER

EKINSHI TÁRTIPLI DIFFERENCIAL-OPERATOR TEŇLEME USHÍN QOYILGAN KOSHI MÁSELESINIŇ SHESHIMI HAQQÍNDA

M.X.Alamínov – fizika-matematika ilimleriniń kandidatu, docent

A.J.Igilikov – assistent oqıtıwshı

Ájiniyaz atındaǵı Nókis mámleketlik pedagogika institutı

Tayanch soʻzlar: funksiya, operator, yagonalik, turgʻunlik, ikkinchi tartibli differentsial-operator tenglama, Koshi masalasi, Gilbert fazosi.

Ключевые слова: функция, оператор, единственность, устойчивость, дифференциально-операторное уравнения второго порядка, задача Коши, Гильбертово пространство.

Key words: the function, the operator, the uniqueness and stability, the second order of differential-operator equation, the Cauchy problems, the Gilbert space.

Meyli, $u(t)$ funksiya t skalyar argumenttiń funksiya bolıp, ol mánislerin H -Gilbert keńisliginde qabıllasın, $f(t)$ hám t skalyar argumenttiń funksiya bolıp, ol F -Gilbert keńisliginde mánislerin qabıllasın, A hám B operatorlar:

$$A: H \rightarrow F, B: H \rightarrow F, D(A) = D(B).$$

Анықлама 1 [2]. $Bu'' = Au + f$ kórinisindegi operator tip koefficientli teńleme ekinshi tártipli differencial-operator teńleme delinedi.

Usı Koshi máselesin qarastıramız:

$$\begin{cases} Bu'' = Au \\ u'(0) = u_1, u(0) = u_0 \end{cases} \quad (1)$$

Bul jerde biz A operator simmetriyalı hám oń, yaǵnıy $\forall u, g \in D(A)$ ushın

$(Au, g) = (u, Ag), (Au, u) \geq \lambda(u, u) (\lambda > 0), \exists B^{-1}$ hám B -operatorı simmetriyalı, yaǵnıy $(Bu, g) = (u, Bg)$ dep esaplaymız.

Анықлама 2. Eger $u(t): [0, T] \rightarrow H$ funksiya tómendegi shártlerdi qanaatlandırsa, yaǵnıy

1) $0 \leq t \leq T$ da $u \in C^2[0, T], u_1, u_0 \in D(A), f \in D(A)$;

2) $0 \leq t \leq T$ da u_1 anıqlanǵan;

3) $\forall t \in [0, T]$ da $u(t)$ funksiya (1)-(2) teńlemeni qanaatlandırsa, onda ol (1)-(2) Koshi máselesiniń sheshimi delinedi.

Meyli, $u_1 = u_2 = 0$ bolsın.

Теорема [1]. Eger $\forall u \in D(A)$ ushın

$A = A^*, (Au, u) \geq \lambda(u, u), B = B^*, \exists B^{-1}$ bolsa, onda (1)-(2) másele sheshimi ushın tómendegi teńsizlik orınlı

$$\|u(t)\|^2 \leq \exp(2t(T-t)) \cdot \|u(0)\|^{2\left(1-\frac{t}{T}\right)} \cdot \|u(T)\|^{2\frac{t}{T}} \quad (3)$$

Дálilenniwi.

Meyli, $\varphi = (Au, u)$ bolsın.

Onda

$$\varphi' = (Au, u)' = 2(Au', u);$$

$$\varphi'' = 2(Au', u') + 2(Au'', u) = 2(Au', u') + 2(Au, B^{-1}Au).$$

Biraq,

$$\frac{d}{dt}((Au'', u') + 2(Au', u'')) = (B^{-1}Au, Au) + (Au', B^{-1}Au) =$$

$$= \frac{d}{dt}(Au, B^{-1}Au)$$

Sonıń ushın

$$\varphi''(t) = 4(u', u').$$

Endi $\psi(t) = \ln(\varphi(t))$ dep alsaq, onda

$$\psi' = \frac{\varphi'}{\varphi};$$

$$\psi'' = \frac{\varphi''\varphi - \varphi'^2}{\varphi^2} \geq -4$$

Bul jerde Koshi-Bunyakovskiy teńsizligi boyınsha

$$\psi(t) \leq \psi(0) \cdot \frac{T-t}{T} + \psi(T) \cdot \frac{t}{T} + 2t(T-t)$$

yaǵnıy

$$\ln \varphi(t) \leq (\ln \varphi(0)) \cdot \frac{T-t}{T} + (\ln \varphi(T)) \cdot \frac{t}{T} + \ln(\exp(2t(T-t)))$$

Bul teńsizlikti potencirlep

$$\|u\|^2 \leq e^{2t(T-t)} \cdot \|u(0)\|^{2\frac{T-t}{T}} \cdot \|u(T)\|^{2\frac{t}{T}}$$

teńsizligine iye bolamız.

Мисал 1. Meyli, $Q = \{(-1 < x < 1) * (0, T)\}$ oblata aralas teńlemege qoyılǵan tómendegi shegaralıq másele berilgen bolsın:

$$\begin{cases} \operatorname{sign} x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(0, x) = f(x), u_1(0, x) = g(x), -1 \leq x \leq 1, \\ u(t, -1) = u(t, 1) = 0; \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(t, -0) = u(t, +0), u_x(t, -0) = u_x(t, +0) \end{cases}$$

Bul jerde $H = L_2(-1; 1)$, al A operator tómendegishe anıqlanadı:

$$Au = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -u_{xx}, u|_{x=-1} = u|_{x=1} = 0$$

B operator retinde $\operatorname{sign}(x)$ funksiya kóbeytiwdi qaraymız.

Haqıyqatında da $\forall u, g \in D(A)$ ushın

$$\begin{aligned} (Au, g) &= -\int_{-1}^1 u_{xx} \cdot g dx = -\int_{-1}^1 g du_x = -g u_x|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 u_x g_x dx = \\ &= \int_{-1}^1 u_x \cdot g_x dx = \int_{-1}^1 g_x du = g_x u|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 u g_{xx} dx = \\ &= \int_{-1}^1 u \cdot g_{xx} dx = (u, Ag), \end{aligned}$$

yaǵnıy

$$A = A^*.$$

$$(Bu, g) = \int_{-1}^1 \operatorname{sign}(x) u \cdot g dx = \int_{-1}^1 u \cdot \sin g(x) g dx = (u, Bg),$$

yaǵnıy

$$B = B^*.$$

Teorema boyınsha bul máseleńiń sheshimi birden-bir hám ornıqlı.

Mısal 2 [3]. D oblast R^n shegaralangán bolıp, onıń shegarası S – sıypaq bolsın:

$$S = \partial D.$$

D oblastda óz-ózine qospa elliptikalıq differencial operatordı tómendegishe shegaralıq shárt penen qaraymız:

$$Au = - \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} a_{kj} \frac{\partial u}{\partial x_k} + cu,$$

$$u|_S = 0, \quad a_{kj} = a_{jk}, \quad \forall j, k,$$

$$\sum_{j,k=1}^n a_{kj} \xi_j \xi_k \geq \delta |\xi|^2, \quad \delta > 0.$$

a_{kj} - úzliksiz differenciallanıwshı, c – úzliksiz funkciya.

Usı aralas máseleńi qaraymız:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Au, \quad u|_{t=0} = u_0, \quad u_t|_{t=0} = u_1$$

Joqarıdaǵı dálillengen teorema boyınsha bul máseleńiń sheshimi birden-bir hám shártli ornıqlı ekenligi kelip shıǵadı.

Endi $L_2(-1;1)$ - Gilbert keńisligi ekenligin kórsetemiz.

Haqıyqatında da,

$$\forall f, g \in L_2(-1;1) \text{ ushın } \int_{-1}^1 f^2 dx < \infty, \int_{-1}^1 g^2 dx < \infty.$$

$$\text{Demek, } \forall \alpha, \beta \in R \text{ ushın } \int_{-1}^1 \alpha^2 f^2 dx < \infty, \int_{-1}^1 \beta^2 g^2 dx < \infty.$$

Biraq

$$2 \int_{-1}^1 fg dx < \int_{-1}^1 f^2 dx + \int_{-1}^1 g^2 dx < \infty.$$

Sonıń ushın $\forall \alpha, \beta \in R$ ushın

$$\int_{-1}^1 (\alpha f + \beta g)^2 dx = \int_{-1}^1 \alpha^2 f^2 dx + \int_{-1}^1 \beta^2 g^2 dx + 2\alpha\beta \int_{-1}^1 fg dx < \infty,$$

yaǵnıy $\forall \alpha, \beta \in R$ ushın $\alpha f + \beta g \in L_2(-1;1)$,

bul bolsa $H = L_2(-1;1)$ keńisligi Gilbert keńisligi ekenligin bildiredi.

Ádebiyatlar

1. Аламинов М.Х. О единственности и устойчивости решения задачи Коши для вырождающегося дифференциального не- равенства четного порядка. // Узбекский математический журнал. 2000, №2, -С.3-13.
2. Аламинов М.Х. Задача Коши для операторно-дифференциального уравнение высокого порядка. // «Вестник» ККО АН РУз, 2002, №1-2, -С. 53-57.
3. Аламинов М.Х., Бектурсынова Д. О свойствах некоторых дифференциальных операторов в гильбертовых пространствах. Сборник тезисов научной онлайн-конференции "Современные проблемы математики" 20-мая 2020. -С. 201-202.

REZYUME

Maqolada ikkinchi tartibli differensial-operator tenglama uchun qo'yilgan Koshi masalasi yechimining yagonaligi va turg'unligi ko'rib chiqilgan. Teoremlarni isbotlashda logarifmik qavariqlik metodidan foydalanilgan.

РЕЗЮМЕ

В статье рассматривается единственность и устойчивость решения задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения второго порядка. При доказательстве теорем используется метод логарифмической выпуклости.

SUMMARY

In article the uniqueness and stability of the solution of Cauchy problem for the second order differential-operator equation are considered. The theorem is proved using the method of logarithmic convexity.

SÍZÍQLÍ TENLEMELER SISTEMASÍNÍN BAZÍBIR QOLLANÍWLARÍ

M.Asqarov – fizika-matematika ilimleriniń kandidati, docent

R.Koshkarbaeva – assistent oqıtıwshı

A.Ubaydullaeva – magistrant

Tayanch sózlar: chiziqlı tenglama, standart usullar, o'zgaruvchi kiritish.

Ключевые слова: линейные уравнение, стандартные методы, замена переменных.

Key words: linear equation, standard methods, change of variables.

Sızıqlı teńlemeler sisteması túsinigi mektep matematikası kursında kiritilip joqarı oqıw orınlarında tereńlestirilip dawam ettiriledi. Olardı sheshiwdiń bir qatar standart usılları bar bolıp, talabalar bul usıllar járdeminde berilgen sızıqlı teńlemelerdi tez hám ańsat sheshiw múmkinshiliklerine iye. Bizler tómende sızıqlı emes teńlemeler sistemaların sheshiwde joqarıda ayılǵan standart usıllardan paydalanıw jolların qaraymız.

1-mısal. Teńlemeler sistemasın sheshiń

$$\begin{cases} 2 \sin x + \sqrt{2} \cos y = 2 \\ \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Sheshiw: Túrlendiremiz $\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \cos y$ teńlik-

ten keyin sistemanı

$$\begin{cases} 2 \sin x + \sqrt{2} \cos y = 2 \\ \sin x - \cos y = \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

kóriniske keltiremiz. Keyin jańa ózgeriwshi almasırıwshılardı kiritemiz.

$$x_1 = \sin x, \quad x_2 = \cos y$$

Bul ózgeriwshi kiritiw arqalı berilgen teńlemeler sisteması sızıqlı teńlemeler sistemasına aylanadı, yaǵnıy

$$\begin{cases} 2x_1 + \sqrt{2}x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

sistemaniń tiykarǵı matricasınıń determinantın esaplaymız.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - \sqrt{2} \cdot 1 = -(2 + \sqrt{2})$$