

ТЕОРЕМЫ О ГОЛОМОРФНОСТИ ФУНКЦИЙ, ПРЕДСТАВИМЫХ ИНТЕГРАЛОМ БОХНЕРА-МАТИНЕЛЛИ

Б.П.Отемураев – доктор физико-математических наук (DSc), доцент
Нукусский государственный педагогический институт имени Ажиязия

Д.Х.Джумабаев – доктор физико-математических наук, доцент
Университет геологических наук, Ташкент

Таянч сўзлар: Бохнер-Мартинелли интегралы, функцияларнинг голоморфлиги, бўлак-бўлак силлиқ чегараси бўлган соҳа.

Ключевые слова: интеграл Бохнера-Мартинелли, голоморфность функций, область с кусочно-гладкой границей.

Key words: Bochner-Martinelli integral, holomorphy of functions, area with a smooth boundary.

Введение. Интегральное представление Бохнера-Мартинелли для голоморфных функций многих комплексных переменных появилось в работах Мартинелли и Бохнера [11, 12, 7] в начале 40-х годов прошлого века. Оно было первым по существу многомерным представлением, в котором интегрирование велось по всей границе области. Это интегральное представление обладает универсальным ядром, не зависящим от вида области, так же как и ядро Коши в C^1 . Но в пространстве C^n при $n > 1$ ядро Бохнера-Мартинелли является гармонической, а не голоморфной функцией. Данное обстоятельство долгое время препятствовало широкому применению интеграла Бохнера-Мартинелли в многомерном комплексном анализе. Мартинелли и Бохнер использовали свое представление для доказательства теоремы Гартогса (Осгуда-Брауна) о стирании компактных особенностей голоморфных функций в C^n при $n > 1$.

Граничные поведения интеграла Бохнера-Мартинелли по аналогии с интегралом Коши для областей с гладкой границей при различных дополнительных предположениях изучены многими авторами [10, 4, 9, 5]. Эти изучения основывались на том, что интеграл Бохнера-Мартинелли является суммой потенциала двойного слоя и касательной производной потенциала простого слоя. Поэтому скачок интеграла Бохнера-Мартинелли совпадает с подынтегральной функцией, но ведет себя при подходе к границе области как интеграл (типа) Коши, т.е. несколько хуже, чем потенциал двойного слоя. Так что интеграл Бохнера-Мартинелли объединяет в себе свойства интеграла Коши и потенциала двойного слоя.

Данная работа посвящена изучению о голоморфности функций, представимых интегралом Бохнера-Мартинелли в областях с кусочно-гладкой границей. Для границ с коническими точками его поведение рассмотрено в [15], а в областях, граница которых содержит конические ребра в [16].

Аналог теоремы Гартогса-Бохнера.

В данном параграфе исследуется граничное поведение интеграла Бохнера-Мартинелли от непрерывных функций в областях с кусочно-гладкой границей.

Бохнер [7] и Мартинелли [12] в 1943 году независимо нашли строгое доказательство теоремы Гартогса о стирании компактных особенностей голоморфных функций. Причем Бохнер, по сути дела, доказал для случаев $\partial D \in C^1(\partial D)$ и $f \in C^1(\partial D)$ (хотя у него, конечно, не было понятия CR -функции, оператора $\bar{\partial}_T$ и т.д.) В 1969 году Вайнсток [13] доказал ее для непрерывных f ($\partial D \in C^\infty$).

Дифференциальные условия на f удалось заменить интегральными Фикера [8].

В начале 70-х годов прошлого века на эту же тему были опубликованы работы Виноградова [3], Байкова [2], Аронова и Даутова [1]. Чирка доказал ее для интегрируемых функций f и поверхностей Ляпунова.

Приведем обобщение теоремы Гартогса-Бохнера на ограниченное области в C^n с кусочно-гладкой границей.

Теорема 1 Пусть D — ограниченная область в C^n ($n > 1$) и $C^n \setminus \bar{D}$ — связно, ∂D — кусочно-гладкая. Если функция $f \in C(\partial D)$ и удовлетворяет условию

$$\int_{\partial D} f \bar{\partial} \omega = 0$$

для всех дифференциальных форм ω типа $(n, n-2)$ с коэффициентами класса C^∞ в C^n , тогда f голоморфно продолжается в D .

Доказательство. Пусть

$$F^-(z) = \int_{\partial D} f(\zeta) U(\zeta, z), z \notin \bar{D}.$$

Если z лежит вне шаре $B(0, R)$ достаточно большого радиуса R , $\bar{D} \subset B(0, R)$, то $\bar{\partial} U(\zeta, z) = 0$.

Поэтому $U(\zeta, z) = \bar{\partial} \alpha_z, \alpha_z$ — форма типа $(n, n-2)$ с коэффициентами класса C^∞ в $B(0, R)$. Тогда

$F^-(z) = 0$ вне $B(0, R)$. Тогда по теореме единственности

для гармонических функций $F^- = 0$ в $C^n \setminus \bar{D}$, а по теореме о скачке интеграла Бохнера-Мартинелли в областях с кусочно-гладкой границей, $F^+(z)$ дает

гармоническое продолжение f в D . Покажем, что F^+ — голоморфная функция в D . Очевидно, что

$$\frac{\partial U(\zeta, z)}{\partial \bar{z}_k} = \bar{\partial}_\zeta \omega_k,$$

где

$$\omega_k = (-1)^k \left[\sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \frac{\partial g}{\partial \zeta_j} d\bar{\zeta} [j, k] + \sum_{j=k+1}^n (-1)^{j-1} \frac{\partial g}{\partial \zeta_j} d\bar{\zeta} [k, j] \right] \wedge d\zeta,$$

а $g(\zeta, z)$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа, т.е.

$$g(\zeta, z) = \begin{cases} -\frac{(n-2)!}{(2\pi i)^n} \frac{1}{|\zeta - z|^{2n-1}} & \text{при } n > 1, \\ \frac{1}{2\pi i} \ln |\zeta - z|^2 & \text{при } n = 1. \end{cases}$$

Форма ω_k имеет особенность только в точке $\zeta = z$. Поэтому

$$\frac{\partial F^+}{\partial \bar{z}_k} = \int_{\partial D} f(\zeta) \bar{\partial}_\zeta \omega_k(\zeta, z), z \in D.$$

Заменяем форму ω_k формой $\psi \omega_k$, где $\psi \in D(C^n)$ и $\psi = 1$ в окрестности ∂D и равна 0 в окрестности точки z , тогда по условию теоремы имеем

$$\frac{\partial F^+}{\partial \bar{z}_k} = \int_{\partial D} f(\zeta) \bar{\partial}_{\zeta}(\psi \omega_k(\zeta, z)) = 0, z \in D.$$

Таким образом, F^+ голоморфна в D .

Теорема 1 является аналогом теоремы Гартогса-Бохнера, который был доказан для случая, когда D — ограниченная область в C^n ($n > 1$) со связной гладкой границей ∂D . Если граница области ∂D не связна, то теорема 3.1 становится неверной. Например, если $D = B(0, 2) \setminus B(0, 1)$ то, задавая на $S(0, 2)$ функцию $f = 1$, а на $S(0, 1)$ функцию $f = 0$, мы получаем, что f — CR-функция на ∂D , но она не продолжается голоморфно в D (в силу теоремы единственности).

Для областей с несвязной границей условие ортогональности точным формам можно заменить условием ортогональности $\bar{\partial}$ -замкнутым формам, и теорема 1 становится верной.

Теорема 2 Пусть D — ограниченная область в C^n с кусочно-гладкой границей класса C^1 , а функция $f \in C(\partial D)$ и на ∂D удовлетворяет условию

$$\int_{\partial D} f \alpha = 0$$

для всякой формы α типа $(n, n-1)$ с коэффициентами класса $C^\infty(\bar{D})$ и такой, что $\bar{\partial} \alpha = 0$ на $\bar{D}$. Тогда f голоморфно продолжается в D . Голоморфное продолжение f дается интегралом Бохнера-Мартинелли.

Доказательство. Пусть

$$F(z) = F^\pm(z) = \int_{\partial D} f(\zeta) U(\zeta, z), z \notin \partial D.$$

Поскольку $\bar{\partial}_{\zeta} U(\zeta, z) = 0$ и форма $U(\zeta, z)$ имеет коэффициенты класса $C^\infty(\bar{D})$, если $z \notin \bar{D}$, то $F^- = 0$ вне $\bar{D}$. Тогда по теореме о скачке интеграла Бохнера-Мартинелли в областях с кусочно-гладкой границей граничные значения $F^+(z)$ на ∂D совпадают с f .

Покажем, что F^+ — голоморфная функция. Также, как в доказательстве теоремы 1.

$$\frac{\partial U(\zeta, z)}{\partial \bar{z}_k} = \bar{\partial}_{\zeta} \omega_k.$$

Форма ω_k имеет особенность только в точке $\zeta = z$. Поэтому

$$\frac{\partial F^+}{\partial \bar{z}_k} = \int_{\partial D} f(\zeta) \bar{\partial}_{\zeta} \omega_k(\zeta, z).$$

Заменяя форму ω_k формой $\psi \omega_k$, где $\psi \in D(C^n)$ и $\psi = 1$ в окрестности ∂D , а в окрестности точки z равна 0, имеем

$$\frac{\partial F^+}{\partial \bar{z}_k} = \int_{\partial D} f(\zeta) \bar{\partial}_{\zeta}(\psi \omega_k(\zeta, z)) = 0$$

по условию теоремы. Таким образом, F^+ голоморфна в D .

Теорема 2 для непрерывных функций f и для областей с границами $\partial D \in C^\infty$ была доказана Вайнстоком [13].

3 Теоремы о голоморфности функций, представимых интегралом Бохнера-Мартинелли

В этом параграфе доказывается теорема о скачке интеграла Бохнера-Мартинелли для функций класса L^p в областях с кусочно-гладкой границей.

Пусть D — ограниченная область в C^n с кусочно-гладкой границей класса C^2 . Будем через $\Omega(\bar{D})$ обозначать окрестность области D , а через Ω_{z^0} — окрестность точки $z^0 \in \partial D$. В качестве определяющих функций области D возьмем $\rho_j \in C^2(C^n)$, $j = 1, \dots, s_0$. Тогда

$$D = \{z \in \Omega(\bar{D}) : \rho_1(z) < 0, \dots, \rho_{s_0}(z) < 0\},$$

$$\tilde{\Gamma}_j = \{z \in \Omega(\bar{D}) : \rho_j(z) = 0, j = 1, \dots, s_0\},$$

$$\partial D \cap \Omega_{z^0} = \Gamma, \Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_l, \quad \text{где}$$

$$\Gamma_j = \{z \in \Omega_{z^0} : \rho_j(z) = 0, \rho_k(z) \leq 0, k \neq j, k = 1, \dots, l\},$$

Γ_j — гладкие поверхности с кусочно-гладкой границей. Поскольку $\partial \Gamma_j \in C^2$, можно утверждать следующее (см. [5]):

а) существует окрестность Ω поверхности $\tilde{\Gamma}_j$ такая, что $\rho_j \in C^2(\Omega)$;

$$\text{б) } |\text{grad } \rho_j| \equiv \frac{1}{2} \text{ в } \Omega;$$

$$\text{в) } \frac{\partial \rho_j}{\partial z_k}(z^\pm) = \frac{\partial \rho_j}{\partial z_k}(z^0),$$

$$\frac{\partial \rho_j}{\partial \bar{z}_k}(z^\pm) = \frac{\partial \rho_j}{\partial \bar{z}_k}(z^0), k = 1, \dots, n, z^\pm \in \Omega, \text{ точки}$$

z^+ и z^- находятся на нормали к $\tilde{\Gamma}_j$ в точке z^0 и

$$|z^+ - z^0| = |z^- - z^0|.$$

$$\text{В этом случае } \rho_k = 2 \frac{\partial \rho}{\partial z_k}, \text{ а } \rho_k^- = 2 \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_k}.$$

Выберем определяющую функцию ρ области D так, что $D = \{z : \rho(z) < 0\}$, $\rho \in C^2(C^n)$, $\text{grad } \rho \neq 0$ в $\Omega(\partial D) \setminus \partial D$, $\partial D_{\pm \varepsilon} = \{\rho = \pm \varepsilon\}$ — гладкие поверхности ($\varepsilon > 0$).

Если $F \in C^1(D)$, то

$$\bar{\partial}_n F = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial \bar{z}_k} \rho_k, \rho_k = \frac{\partial \rho}{\partial z_k} \frac{1}{|\text{grad } \rho|}.$$

Если расписать форму $\bar{\partial}_n F = \partial_\tau F + \lambda \frac{\bar{\partial} \rho}{|\bar{\partial} \rho|}$, где $\partial_\tau F$ — касательная часть $\bar{\partial} F$, то $\lambda = \bar{\partial}_n F$, т.е. $\bar{\partial}_n F$ — это коэффициент в нормальной части формы $\bar{\partial}_n F$. Если через $\nu(z)$ обозначить единичный вектор внешней нормали к ∂D в точке гладкости z , а $s(z) = i\nu(z)$, то

$$\bar{\partial}_n F = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial \nu} + i \frac{\partial F}{\partial s} \right).$$

С другой стороны, форма $\bar{\partial}_n F d\sigma = * \bar{\partial} F|_{\partial D}$ (см. [5]),

$$\begin{aligned} * \bar{\partial} F &= * \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k = \\ &= \frac{i^n}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}_k} dz[k] \wedge d\bar{z} = \\ &= \frac{i^n}{2^{n-1}} (-1)^n \mu_F, \end{aligned}$$

где $*$ — оператор Ходжа, μ_F — дифференциальная форма имеющая вид

$$\mu_F = \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k-1} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}_k} dz[k] \wedge d\bar{z},$$

$dz[k] = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_{k-1} \wedge dz_{k+1} \wedge \dots \wedge dz_n$, а $d\bar{z} = d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n$, а $d\sigma$ — мера Лебега на ∂D .

Пусть, как обычно, F — интеграл Бохнера-Мартинелли, т.е.

$$F(z) = \int_{\partial D} f(\zeta) U(\zeta, z), \quad z \notin \partial D,$$

функция $f \in C(\partial D)$, а $U(\zeta, z)$ — ядро Бохнера-Мартинелли.

Теорема 3 Пусть f — гармоническая функция в D , $f \in C(\bar{D})$ и $\bar{\partial}_n f \in C(\bar{D})$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $\bar{\partial}_n f = 0$ на ∂D ;
2. $F^+ = f$ в D ;
3. $F^- = 0$ вне $\bar{D}$.

Доказательство. Пусть $f \in C(\bar{D})$ и ∂D — кусочно-гладкая.

Возьмем $D_\varepsilon = \{z \in D : \rho(z) < -\varepsilon\}$, $\partial D_\varepsilon \in C^2$ и $\bigcup_{\varepsilon>0} D_\varepsilon = D$, $D_\varepsilon \cap D_\delta \cap D, 0 < \delta < \varepsilon$. Тогда по формуле Грина в комплексной форме

$$\int_{\partial D_\varepsilon} f(\zeta) U(\zeta, z) - \int_{\partial D_\varepsilon} \mu_f(\zeta) g(\zeta, z) = \begin{cases} f(z), & z \in D_\varepsilon, \\ 0, & z \notin \bar{D}_\varepsilon; \end{cases}$$

перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{\partial D_\varepsilon} f(\zeta) U(\zeta, z) - \int_{\partial D_\varepsilon} \mu_f(\zeta) g(\zeta, z) \right) &= \\ = \int_{\partial D} f(\zeta) U(\zeta, z) - \int_{\partial D} \mu_f(\zeta) g(\zeta, z) &= \begin{cases} f(z), & z \in D, \\ 0, & z \notin \bar{D}; \end{cases} \quad (3.1) \\ g(\zeta, z) \mu_f|_{\partial D} &= -\frac{2^{n-1}}{i^n} \bar{\partial}_n f \frac{(n-2)!}{(2\pi i)^n} \frac{d\sigma(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n-2}} = \\ &= -\frac{(n-2)!}{2\pi^n} \bar{\partial}_n f \frac{d\sigma(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n-2}}. \end{aligned}$$

Если $\bar{\partial}_n f = 0$, то из (3.1) следует, что $F^+ = f$ в D .

Если $F^+ = f$ в D , то по теореме о скачке интеграла Бохнера-Мартинелли в областях с кусочно-гладкой границей [14] $F^- = 0$ на ∂D ; так как F^- — функция гармоническая и $F^-(z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$, то $F^- \equiv 0$ по теореме единственности.

Таким образом, из (3.1) получаем

$$\int_{\partial D} \bar{\partial}_n f(\zeta) \frac{1}{|\zeta - z|^{2n-2}} d\sigma(\zeta) = 0$$

для всех $z \notin \partial D$. Применяя теперь теорему Келдыша-Лаврентьева о плотности дробей вида $\frac{1}{|\zeta - z|^{2n-2}}$ в пространстве функций $C(K)$ для компактов K с нулевым объемом получаем, что $\bar{\partial}_n f = 0$ на ∂D .

Таким образом условия 1 и 2 в теореме 1 эквивалентны, а эквивалентность условий 2 и 3 следует из теоремы о скачке интеграла Бохнера-Мартинелли в областях с кусочно-гладкой границей и теоремы единственности для гармонических функций.

Теорема 4 Пусть D — ограниченная область в C^n с кусочно-гладкой границей класса C^2 . Для того чтобы функция $f \in C(\bar{D})$ была голоморфна в D необходимо и достаточно, чтобы $F^+ = f$ в D .

Доказательство. Если $F^+ = f$ в D , то по теореме о скачке интеграла Бохнера-Мартинелли в областях с кусочно-гладкой границей $F^- = 0$ на ∂D и по следствию из [14] F^- непрерывна вплоть до ∂D . По теореме единственности для гармонических функций $F^- \equiv 0$. Тогда $\bar{\partial}_n F^- = 0$, поэтому (по теореме 3) $\bar{\partial}_n F^+ = \bar{\partial}_n f$ непрерывно продолжается на $\bar{D}$ и $\bar{\partial}_n f = 0$ на ∂D . Пусть $\rho(z)$ — определяющая функция для D , а

$D_\varepsilon = \{z \in D : \rho(z) < -\varepsilon\}$ ($\varepsilon > 0$). Тогда

$$\int_{\partial D_\varepsilon} \overline{f} \partial_n f d\sigma = \int_{\partial D_\varepsilon} \overline{f} (*\partial_n f) =$$

$$= 2^{1-n} i^n \int_{\partial D_\varepsilon} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_k} \right|^2 dz \wedge d\overline{z} \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Следовательно, $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_k} = 0$ в D для всех

$k = 1, \dots, n$.

Теорема 4 для областей с гладкой границей класса C^2 доказана Кытмановым и Айзенбергом в [6] (см. также [5]).

Следствие 1 Если $f \in C(\partial D)$, ∂D — кусочно-гладкая класса C^2 , тогда следующие условия эквивалентны:

1. Функция f — голоморфно продолжается в D до функции из класса $C(\overline{D})$;

2. $F^- = 0$ вне $\overline{D}$;

3. F^+ дает гармоническое продолжение f в D ;

4. $\overline{\partial}_n F^+$ непрерывно продолжается на $\overline{D}$ и $\overline{\partial}_n F^+|_{\partial D} = 0$.

Теорема 5 Пусть область D с кусочно-гладкой границей класса C^2 в C^n ($n > 1$) и $C^n \setminus \overline{D}$ связно. Если $f \in C(\partial D)$ и F^+ голоморфна в D , тогда граничное значение F^+ совпадает с f .

Доказательство. Если F^+ голоморфна в D , а ∂D — кусочно дважды гладкая и множество $C^n \setminus \overline{D}$ связно, то $\overline{\partial}_n F^+ = 0$ в D . Используя теорема о скачке $\overline{\partial}$ -нормальной производной интеграла Бохнера-Мартинелли в областях с кусочно-гладкой границей [14], получим, что $\overline{\partial}_n F^- = 0$ на ∂D .

Возьмем область $D_{-\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$) так, чтобы $D \subset D_{-\varepsilon}$ и $\partial D_{-\varepsilon} \in C^2$, т.е.

$$D_{-\varepsilon} = \{z \in C^n : \rho(z) < \varepsilon\}, \bigcap_{\varepsilon > 0} D_{-\varepsilon} = D.$$

Поскольку $F^- = O(|z|^{1-2n})$, а

$$\frac{\partial F^-}{\partial \overline{z}_k} = O(|z|^{-2n}) \text{ при } |z| \rightarrow \infty, \text{ то, применяя}$$

формулу Стокса в $C^n \setminus D$, имеем

$$\int_{\partial D_{-\varepsilon}} \overline{F}^- (*\partial F^-) = -2^{1-2n} i^n \int_{C^n \setminus D_{-\varepsilon}} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial F^-}{\partial \overline{z}_k} \right|^2 dz \wedge d\overline{z},$$

перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, тогда

$$0 = \int_{\partial D} \overline{F}^- * \partial F^- = -2^{1-2n} i^n \int_{C^n \setminus D} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial F^-}{\partial \overline{z}_k} \right|^2 dz \wedge d\overline{z}.$$

Следовательно, F^- голоморфна в $C^n \setminus D$ и по теореме Гартогса голоморфно продолжается в C^n . А так как ∂D связна и $F^- \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$, то $F^- \equiv 0$ (здесь $n > 1$). Применяя теперь следствие 1, получаем требуемое: $F^+ = f$ на D .

При $n = 1$ теорема 5 не верна. Если ∂D не связна, то она также не верна, достаточно положить $f = 1$ на одной связной компоненте ∂D и $f = 0$ на остальных компонентах.

Теорема 5 для областей с гладкой границей класса C^2 доказана Кытмановым (см. [5]).

Пусть $P_k(z)$ — однородный гармонический многочлен степени k вида

$$P_k(z) = \sum_{\|\alpha + \beta\| = k} a_{\alpha, \beta} z^\alpha \overline{z}^\beta,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ —

мультииндексы, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$ и $\overline{z}^\beta$ — мономы, $\|\alpha\| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Тогда

$$P_k(z) = \sum_{s+t=k} P_{s,t}(z),$$

где

$$P_{s,t}(z) = \sum_{\|\alpha\|=s} \sum_{\|\beta\|=t} a_{\alpha, \beta} z^\alpha \overline{z}^\beta.$$

Многочлены $P_{s,t}$ — гармонические многочлены, имеющие степень однородности по z равную s , а по $\overline{z}$ равную t .

Рассмотрим ортонормированный базис $\{P_{s,t,k}\}$ в $L^2(S(0,1))$, состоящий из однородных гармонических полиномов степени s по z и степени t по $\overline{z}$, $s, t = 0, 1, \dots, k-1$, где $S(0,1)$ — это сфера с центром в точке 0 и радиусом 1.

Следствие 2 Пусть ∂D — кусочно-гладкая класса C^2 и $C^n \setminus \overline{D}$ связно, а $f \in C(\partial D)$. Для того чтобы f продолжалась в D до функции

$F \in A(D)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{\partial D} f (*\partial P_{s,t,k}) = \int_{\partial D} f \partial_n P_{s,t,k} d\sigma = 0$$

для всех s, t, k .

Доказательство. Функция $M^{-1}f$ гармонична вне D , поэтому для равенства $M^{-1}f = 0$ вне $\overline{D}$ достаточно доказать, что $M^{-1}f = 0$ вне некоторого шара $B(0, R) \supset \overline{D}$. При $z \notin B(0, R)$ функция $|\zeta - z|^{2-2n}$ гармонична по ζ в $\overline{B(0, R)}$ и, значит, представима равномерно сходящимся на $\overline{B(0, R)}$ рядом по гармоническим полиномам $P_{s,t,k}$. Так как $U(\zeta, z) = 2^{n-1}i^n (*\partial_{\zeta} g(\zeta, z))$, получаем требуемое

$$\int_{\partial D} f(\zeta) U(\zeta, z) = 0$$

для $z \notin B(0, R)$.

При $n = 1$ следствие 2 превращается в классический критерий существования голоморфного продолжения, состоящий в ортогональности f мономам $z^s, s = 0, 1, \dots$, так как в этом случае $P_{s,t,k} = az^s + b\bar{z}^t$ и, следовательно, $*\partial P_{s,t,k} = cz^{s-1}dz, s \geq 1$.

Литература

1. Аронов А.М., Даутов Ш.А. Об одном результате Б.Вайнстока // Некоторые свойства голоморфных функций многих комплексных переменных. Красноярск, 1973. - С. 193-195. (Сб. науч. тр.// Ин-т физики им. Л.В.Киренского СО АН СССР).
2. Байков В.А. Об одной граничной теореме для голоморфных функций двух комплексных переменных // Успехи мат. наук. 1969. Т. 24, № 5. -С. 221-222.
3. Виноградов В.С. Об аналоге интеграла типа Коши для аналитических функций многих комплексных переменных // Докл. АН СССР. 1968. Т. 178. № 2. -С. 282-285.
4. Даутов Ш.А., Кытманов А.М. О граничных значениях интеграла типа Мартинелли-Бохнера // Некоторые свойства голоморфных функций многих комплексных переменных. Красноярск, ИФСОАН, 1973. -С.49-54.
5. Кытманов А.М. Интеграл Бохнера-Мартинелли и его применения. -Новосибирск: «Наука», 1992.
6. Кытманов А.М., Айзенберг Л.А. О голоморфности непрерывных функций, представимых интегралом Мартинелли-Бохнера // Изв. АН Арм. Сер. мат. 1978. Т. 13. №2. -С.158-169.
7. Bochner S. Analitic and meromorphic continuation by means of Green's formula // Ann. Math. 1943. V. 44. -P. 652-673.
8. Fichera G. Caratterizzazione della traccia, sulla frontiera di un campo, di una funzione analitica di piu variabili complesse // Atti. Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 1957. V. 22. P. 706-715.
9. Harvey F.R., Lowson H.B. On boundaries of complex analitic varieties// Ann. Math. 1975. v.102. P.223-290.
10. Look C.H., Zhong T.D. An extension of Privalov theorem // Acta Math. Sinica. 1957. V. 7, №1. P. 144-165.
11. Martinelli E. Alcuni teoremi integrali per le funzioni analitiche di piu variabili complesse // Mem. R. Acad. Ital. 1938. V. 9. -P. 269-283.
12. Martinelli E. Sopra una dimonstrazione de R. Fuetar per in theorema di Hartogs// Comment. Math. Helv/ - 1943. - V. 15. - P. 340-349.
13. Weinstock B.M. Continuous boundary values of analytic functions of several complex variables// Proc. Amer. Math. Soc. - 1969. - V. 21, 2. -P. 463-466.
14. Kytmanov A.M., Dzhumabaev D.Kh., Utemuratov B.P., Prenov B.B. Jump theorems for the Bochner-Martinelli integral in domains with a piecewise smooth boundary // Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences. 2020. Volume 3. -P. 1-19.
15. Кытманов А.М. Мысливец С.Г. Сингулярный интегральный оператор Бохнера-Мартинелли на гиперповерхностях с особыми точками // Вестник НГУ. Сер. математика, механика, информатика, 7(2007), вып. 2, -С. 17-32.
16. Джумабаев Д.Х. Голоморфное продолжение функций с замкнутых гиперповерхностей с сингулярными ребрами. // Известия вузов. Математика. -Казань: 2012. №1. -С. 12-21.
17. Джумабаев Д.Х. Граничное поведение интеграла Бохнера-Мартинелли для ограниченных областей с сингулярными ребрами. // ДАН РУз. 2012. №3, -С. 12-15.

РЕЗЮМЕ

Гартогс-Бохнер теоремасининг аналогиси исботланган. Бўлак-бўлак силлиқ чегаралари бўлган соҳаларда узлуксиз функциялар учун Бохнер-Мартинелли интеграл билан ифодаланган функцияларнинг голоморфияси бўйича теоремалар олинди.

РЕЗЮМЕ

Доказан аналог теоремы Гартогса-Бохнера. Получены теоремы о голоморфности функций, представимых интегралом Бохнера-Мартинелли для непрерывных функций в областях с кусочно-гладкой границей.

SUMMARY

An analogue of the Hartogs-Bochner theorem is proved. Theorems on the holomorphism of functions represented by the Bochner-Martinelli integral are obtained for continuous functions in areas with fragmentary smooth boundaries.

Фойдаланувчини идентификациялаш ва аутентификациялаш жараёнларини такомиллаштиришда блокчейн технологиясининг қўлланилиши

Қ.Б.Рахимбердиев – таянч докторант

Мирзо Улугбек номидаги Ўзбекистон миллий университети

Таянч сўзлар: идентификация, аутентификация, блокчейн, блок, биометрик маълумот, криптография, шифрлаш, дешифрлаш.

Ключевые слова: идентификация, аутентификация, блокчейн, блок, биометрические данные, криптография, шифрование, дешифрование.

Key words: identification, authentication, blockchain, block, biometric data, cryptography, encryption, decryption.

Ҳозирги кунда ахборот технологияси жамиятимизнинг турли жабҳаларига жадал кириб бориши мамлакатимизда индустриал жараёнларнинг ривожланишига сезиларли даражада ўз таъсирини кўрсатмоқда. Бу ҳолат сўнгги йилларда мамлакатимизнинг ижтимоий ва иқтисодий соҳаларини янада ривожлантиришда ахборот технологияларини кенг жорий қилиш, иқтисодиётнинг кўпчилик тармоқларини рақамлаштириш муаммоси билан боғлиқ. Шу ўринда рақамли иқтисодиёт, рақамли тиббиёт, ақлли уйлар каби мисолларни келтириш мумкин. Иқтисодиёт соҳаларини рақамлаштириш жамият ривожланишининг юқори чўққиларига эришиш

ва мамлакатимизни барча соҳалар бўйича ривожланган мамлакатлар қаторидан ўрин эгаллашига имконият яратади. Лекин, ахборот коммуникация воситаларининг кенг қўламдаги жорий қилиниши алоқа тармоқларида ахборот хавфсизлигини таъминлаш муаммосини келтириб чиқаради. Жумладан, компьютер тизимларида ахборот ресурсларига ва фойдаланувчи маълумоларига рухсатсиз кириш хавфи унинг натижасига нисбатан хавфлироқ бўлиб ҳисобланади. Сабаби, компьютер тармоқларида битта эмас балки миллионлаб фойдаланувчиларнинг ахборотлари сақланади [1].