

IRRACIONAL TEŃLEMELERDI SHESHIWDIŃ BAZÍ BIR USÍLLARÍ

M.Asqarov – fizika-matematika ilimleriniń kandidatu, docent

Ájiniyaz atındaǵı Nókis mámleketlik pedagogikalıq institutu

Tayanch sózlar: tenglama, irratsional tenglama, trigonometrik almashtırishlar usulı.

Ключевые слова: уравнение, иррациональное уравнение, метод тригонометрического подстановки.

Key words: equation, irrational equation, trigonometric substitution method.

Ózgeriwshisi koren astında bolǵan teńlemelerge irratsional teńleme dep ataladı. Mısalı $\sqrt[3]{x} - 2 = 0$ teńleme. Irratsional teńlemelerdi sheshiwde payda bolǵan sheshimdi tekseriw talap etiledi, sebebi durıs emes teńlikti kvadratqa kótergende durıs teńlik payda bolıwı múmkin.

Ayırım jaǵdaylarda irratsional teńlemenı teń kúshli teńlemelerge ótiw arqalı sheshiw qolaylı boladı.

1-mısal. Teńlemenı shesheyik: $\sqrt{x} = x - 2$.

Teńlemenıń eki tárepın kvadratqa kóterip $x = x^2 - 4x + 4$ teńlemege iye bolamız. Túrlendiriwlerden keyin $x^2 - 5x + 4 = 0$ kvadrat teńlemege iye bolamız hám onıń korenlerin $x = 1$ hám $x = 4$ tabamız.

Tabılǵan sanlar berilgen teńlemenıń koreni bolatuǵın tekseremiz $\sqrt{4} = 4 - 2$, yaǵniy 4 – berilgen teńlemenıń sheshimi, al 1 sanın teńlemege qoyǵanda $1 = -1$ durıs emes teńlik payda boladı, yaǵniy 1 sanı berilgen teńlemenıń sheshimi emes, demek ol qollanǵan sheshiw usılınan payda bolǵan ózgeshe koren dep ataladı.

Juwbabı: $x = 4$.

Teńlemenıń eki tárepın kvadratqa kóteriwden aldın teńliktiń bir tárepinde tek radikallar, al ekinshi tárepinde berilgen teńlemenıń qalǵan aǵzaları turatuǵında etip túrlendiriw kerek. Eger, radikallar sanı úsh hám onnanda kóp bolsa usı procesti radikallardan qutılǵansha dawam et-tiremiz.

3-dárejeli radikalǵa iye bolǵan teńlemelerdi sheshiwde tómendegi birdeyliklerdi qollanǵan paydalı boladı:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

2-mısal: $\sqrt[3]{2x+17} - \sqrt[3]{2x-2} = 1$.

Bul teńlemenıń eki tárepın 3-dárejeye kóteremiz hám joqarıdaǵı keltirilgen birdeyliklerden paydalanamız:

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{2x+17} - \sqrt[3]{2x-2})^3 &= 1^3 \Leftrightarrow 2x+17 - 2x-2 - \\ &- 3\sqrt[3]{2x+17}\sqrt[3]{2x-2}(\sqrt[3]{2x+17} - \sqrt[3]{2x-2}) = 1 \end{aligned}$$

Qawıs ishindeǵı ańlatpa 1 ge ten ekenligin esapqa alıp teńlemenı túrlendiremiz hám jańa teńlemege iye bolamız:

$$6 = \sqrt[3]{(2x+17)(2x-2)} \Leftrightarrow 6^3 = (2x+17)(2x-2)$$

Teńlemenı sheship $x = 5$ hám $x = -\frac{25}{2}$ korenlerine iye bolamız.

Juwbabı: $5; -\frac{25}{2}$.

Irratsional teńlemelerdi sheshiwdiń usılları ádette irratsional teńlemenı oǵan teń kúshli bolǵan yamasa onıń saldarı bolǵan ratsional teńleme menen almashtırıwǵa tiykarlanǵan. Sonlıqtan, irratsional teńlemelerdi sheshiwde eki jol bar boladı:

1) saldar teńlemege ótiw hám tabılǵan korenlerdi tekseriw;

2) teń kúshli sistemaǵa ótiw.

Ekinshi jol tabılǵan korenlerdi tekseriwden qutqaradı hám isenimli bolıp esaplanadı.

3-mısal: Teńlemenı sheshemiz

$$\frac{\sqrt{x^2+8x}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+7} = \frac{7}{\sqrt{x+1}}$$

Teńlemenı tómendegishe jazamız

$$\sqrt{x^2+8x} + \sqrt{x^2+8x+7} = 7$$

Belgilep alıp $x^2+8x=t$ mına teńlemege iye bolamız $\sqrt{t} + \sqrt{t+7} = 7$. Bul teńleme bir ǵana 9 korenine iye boladı. x ózgeriwshisine qaytıp $x^2+8x-9=0$, $x_1 = -9$, $x_2 = 1$ iye bolamız.

Tekseriw arqalı -9 – ózgeshe korendi tabamız.

Juwbabı: 1.

Irratsional teńlemelerdi sheshiwde effektiv esaplanatuǵın usıllardı yaǵniy trigonometriyalıq almashtırıw usılın qarayıq.

4-mısal. Teńlemenı shesheyik:

$$\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}} + 2x^2 = 1$$

$1-x^2 \geq 0$ bolǵanlıqtan, $|x| \leq 1$ boladı. Sonlıqtan

$x = \sin \alpha$, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ belgilewdi kiritiwge boladı.

Teńleme tómendegi túrge keltiriledi

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1+2\sin \alpha \cos \alpha}{2}} &= 1 - 2\sin^2 \alpha \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{|\sin \alpha + \cos \alpha|}{\sqrt{2}} &= \cos 2\alpha \Leftrightarrow \left| \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right| = \cos 2\alpha \end{aligned}$$

Belgileymiz $\alpha + \frac{\pi}{4} = u$, bunda $u \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$, bul

jaǵdayda

$$|\sin u| = \sin 2u \Leftrightarrow \begin{cases} \sin u > 0 \\ \cos u = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin u = 0 \\ \sin u < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{\pi}{3} \\ u_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_1 = \sin \left(u_1 - \frac{\pi}{4} \right) &= \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

$$x_2 = \sin \left(u_2 - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Juwbabı: $\left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \right\}$.

Radikal belgisi astındaǵı ańlatpanı tolıq kvadratqa aylandırıw arqalı sheshiw usılı

5-mısal. Teńlemenı sheshiń:

$$\sqrt{5+x-4\sqrt{x+1}} + \sqrt{10+x-6\sqrt{x+1}} = 1.$$

Sheshiw: Koren astındaǵı ańlatpanı túrlendiremiz:

$$5+x-4\sqrt{x+1} = (x+1) - 2 \times 2\sqrt{x+1} + 4 = (\sqrt{x+1}-2)^2$$

$$10+x-6\sqrt{x+1} = (x+1) - 2 \times 3\sqrt{x+1} + 9 = (\sqrt{x+1}-3)^2$$

$\sqrt{a^2} = |a|$, teńliginen paydalanıp tómendegige iye bolamız:

$$|\sqrt{x+1}-2| + |\sqrt{x+1}-3| = 1.$$

Meyli $y = \sqrt{x+1}$; $y \geq 0$ bolsın. Bul jaǵdayda teńleme mına túrge keledi:

$$\begin{cases} |y-2| + |y-3| = 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq 2 \\ -y+2-y+3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq 2 \\ y=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq y \leq 3 \\ y-2-y+3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq y \leq 3 \\ 1=1 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq y \leq 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 3 \\ y-2+y-3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 3 \\ y=3 \end{cases}$$

Belgilewge qaytamız:

$$2 \leq \sqrt{x+1} \leq 3 \Leftrightarrow 4 \leq x+1 \leq 9 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 8$$

Juwabı: [3;8].

Teńlemenıń eki tárepın funksiyaǵa kóbeytiw.

6-mısal. Teńlemenı sheshiń

$$\frac{1}{4}x = (\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1-x}+1).$$

Sheshiw. Teńlemenıń eki tárepın $h(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 1$ funksiyaǵa kóbeytemiz. $\sqrt{1+x}+1$ ańlatpası $\sqrt{1+x}-1$ ańlatpasına tıyinles bolıp esaplanadı. Bul kóbeytiwdiń maqseti: eki tıyinles ańlatpanıń kóbeymesi radikallarsız ańlatpa bolatuǵınan paydalanıw.

Bul kóbeytiwdiń hám sáykes túrlendiriwlerdiń nátiyjesinde tómendegi teńlemege iye bolamız.

$$x(\sqrt{1+x}-4\sqrt{1-x}-3)=0. \text{ Bul teńleme } \sqrt{1+x}-4\sqrt{1-x}-3=0$$

teńlemesi korengge iye bolmaǵanlıqtan, tek bir ǵana $x=0$

korengge iye boladı.

Tekseriw $x=0$ - koren ekenligin korsetedi.

Juwabı. $x=0$.

Teńlemenı ańqlanıw oblastın tabıw hám izertlew arqalı sheshiw.

7-mısal. Teńlemenı sheshiń:

$$3\sqrt{3x+1} - \sqrt{x-1} - 4\sqrt{x+7} = -2 - \sqrt{1-x}.$$

Sheshiw:

$$A.O: \begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1/3 \\ x \geq 1 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

Mánisler oblastı tek bir ǵana mánisten turadı. Bul mánistiń teńleme koreni ekenligin tekseremiz.

$$3\sqrt{4} - \sqrt{0} - 4\sqrt{8} = -2 - \sqrt{0}; 6-8 = -2; -2 = -2.$$

Demek, $x=1$ biziń teńlememizdiń koreni.

Juwabı: 1

Teńlemenı teńsizliklerden paydalanıp sheshiw

8-mısal. Teńlemenı sheshiń

$$\sqrt{1-\frac{x}{3}} + \sqrt[6]{1+x} = \left(1-\frac{x}{24}\right)^4 + \left(1+\frac{x}{36}\right)^6$$

Sheshiw. Teńlemenıń shep tárepine Bernulli teńsizligin (eger $0 < p < 1$ bolsa, onda $(1+x)^p \leq 1+px$, bunda $x > -1$) al oń tárepın Bernulli teńsizligine (eger $p < 0$ yamasa $p > 1$, bolsa, onda $(1+x)^p \geq 1+px$) kóbeytemiz.

Bul jaǵdayda:

$$\sqrt{1-\frac{x}{3}} + \sqrt[6]{1+x} = \left(1-\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}} + (1+x)^{\frac{1}{6}} \leq 1-\frac{x}{6} + 1+\frac{x}{6} = 2$$

hám

$$\left(1-\frac{x}{24}\right)^4 + \left(1+\frac{x}{36}\right)^6 \geq 1-\frac{x}{6} + 1+\frac{x}{6} = 2.$$

Bunnan teńlemenıń eki tárepine qollanılgan Bernulli teńsizligi teńlikke aylanatuǵın kelip shıǵadı, bul tek $x=0$ bolǵan jaǵdayda ǵana orınlanadı.

Juwabı: $x=0$.

Ádebiyatlar

1. Абдухамидов А. ва бошқ. Алгебра ва математик анализ асослари (1, 2 қисм). Академик лицей ва касб-хунар коллежлари учун. – Т.: “Ўқитувчи”, 2014.
2. Егоров А. Иррациональные уравнения. Математика. Первое сентября. 2002.
3. Моденов В. П. Решение иррациональных уравнений. Математика в школе. 1970.

Ushbu maqolada irratsional tenglamalarni echishning bazi usullari misollar yordamida tushuntirilgan.

В статье описываются некоторые методы решения иррациональных уравнений.

The author of the article describes some methods of solving irrational equations.

REZYUME

PEZIOME

SUMMARY