

ТАБИИЙ НАМ ТЕХНИКАЛІҚ ИЛИМЛЕР

Fizika. Matematika

УДК 517.95

НАЧАЛЬНО - ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

А.Б.Бекиев - кандидат физико-математических наук, доцент
Каракалпакский государственный университет имени Бердаха

А.Б.Мамбетов - ассистент преподаватель
Д.Ж.Бабаназаров - ассистент преподаватель

Нукусский филиал Ташкентского государственного аграрного университета

Таянч сўзлар: нолокал муаммо, биортогональ қатор, ўзига хослик, мавжудлик, Рисс асоси.

Ключевые слова: нелокальная задача, биортогональный ряд, единственность, существование, базис Рисса.

Key words: nonareal problem, biorthogonal row, uniqueness, existence, Riss basis.

Введение. К краевым задачам для уравнений частных производных четвёртого порядка сводятся многие задачи науки и техники: задачи динамики одномерных течений, динамики сжимаемой экспоненциально стратифицированной жидкости, задачи распространения волн в диспергирующих средах, поперечные колебания стержня и балок и другие. Из этого вытекает важность изучения краевых задач для уравнений четвёртого порядка. В работе [1] исследованы краевые задачи четвёртого порядка в прямоугольной области. Для решения рассматриваемых некоторых задач получены априорные оценки. А в работе [2] изучены вопросы классификации и приведения к каноническому виду линейных дифференциальных уравнений с частными производными четвёртого порядка. Краевые задачи для вырождающегося уравнения второго порядка с нелокальными и локальными условиями исследованы в [5-7].

В этой работе исследованы начально-граничные задача для вырождающегося уравнения четвёртого порядка с нелокальными условиями. Показаны существование и единственность решения задачи.

Постановка задачи. В области $\Omega = \{(x, t): 0 < x < 1, 0 < t < \beta\}$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{tt}(x, t) + t^m u_{xxxx}(x, t) + b^2 t^m u(x, t) = 0, \quad (1)$$

где $m = \text{const} > 0, b = \text{const}$.

Задача 1. Найти решение $u(x, t)$ в области Ω уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(0, t) = u_x(1, t), \quad u_{xx}(1, t) = 0, \quad u_{xxx}(0, t) = u_{xxx}(1, t), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (3)$$

Система функций

$$X_0(x) = 2x, \quad X_{1n}(x) = 2 \sin \lambda_n x, \quad X_{2n}(x) = \frac{e^{\lambda_n x} - e^{\lambda_n(1-x)}}{e^{\lambda_n} - 1} + \cos \lambda_n x \quad (4)$$

и биортогональная с ней система функций

$$Y_0(x) = 1, \quad Y_{1n}(x) = \frac{e^{\lambda_n x} + e^{\lambda_n(1-x)}}{e^{\lambda_n} - 1} + \sin \lambda_n x, \quad Y_{2n}(x) = 2 \cos \lambda_n x, \quad \lambda_n = 2\pi n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

образуют базис Рисса в $L_2(0, 1)$ [2].

Имеет место следующая теорема.

Единственность и существование решение задачи.

Теорема. Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют следующим условиям: $\varphi(x), \psi(x) \in C^{(5)}[0, 1]$, $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, $\varphi'(0) = \varphi'(1)$, $\psi'(0) = \psi'(1)$, $\varphi''(1) = 0$, $\psi''(1) = 0$, $\varphi'''(0) = \varphi'''(1)$, $\psi'''(0) = \psi'''(1)$, $\varphi^{(4)}(0) = \psi^{(4)}(0) = 0$, то существует единственное регулярное решение задачи 1.

Доказательство. Решение задачи 1 ищем в виде ряда

$$u(x, t) = u_0(t) X_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [u_{1n}(t) X_{1n}(x) + u_{2n}(t) X_{2n}(x)]. \quad (6)$$

Подставляя (6) в уравнение (1), получим следующие уравнения для нахождения функций $u_0(t), u_{1n}(t), u_{2n}(t)$:

$$u_0''(t) + b^2 t^m u_0(t) = 0, \quad (7)$$

$$u_{in}''(t) + (\lambda_n^4 + b^2) t^m u_{in}(t) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (8)$$

Решение уравнение (7) примет вид:

$$u_0(t) = a_0 \sqrt{t} J_{\frac{1}{2q}}(p_0 t^q) + b_0 \sqrt{t} Y_{\frac{1}{2q}}(p_0 t^q),$$

где a_0, b_0 - пока неизвестные константы, $p_0 q = b$, $q = \frac{1}{2}(m+2)$, $J_{\frac{1}{2q}}(p_0 t^q), Y_{\frac{1}{2q}}(p_0 t^q)$ - функции Бесселя I и II рода соответственно. Для определения a_0 и b_0 используем условия (2), которое переходят в виде

$$u_0(0) = \int_0^1 \varphi(x) dx = \varphi_0, \quad u_0'(0) = \int_0^1 \psi(x) dx = \psi_0. \quad (9)$$

Тогда решение (7) удовлетворяющий условиям (9) имеет вид

$$u_0(t) = \left(\gamma_0 \psi_0 + \gamma_0^{-1} \frac{\pi \varphi_0}{2q} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2q} \right) \sqrt{t} J_{\frac{1}{2q}}(p_0 t^q) - \gamma_0^{-1} \frac{\pi \varphi_0}{2q} \sqrt{t} Y_{\frac{1}{2q}}(p_0 t^q),$$

где $\gamma_0 = \frac{1}{2q} \Gamma\left(\frac{1}{2q}\right) \left(\frac{p_0}{2}\right)^{-\frac{1}{2q}}$, $\Gamma(\cdot)$ -гамма функция.

Решение уравнения (8) удовлетворяющим условиям

$$u_{in}(0) = \int_0^1 \varphi(x) Y_{in}(x) dx = \varphi_{in}, \quad u'_{in}(0) = \int_0^1 \psi(x) Y_{in}(x) dx = \psi_{in}$$

примет вид:

$$u_{in}(t) = \left[\gamma_n \psi_{in} + \gamma_n^{-1} \frac{\varphi_{in}}{2q} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2q} \right] \sqrt{t} J_{\frac{1}{2q}}(p_n t^q) - \gamma_n^{-1} \frac{\varphi_{in}}{2q} \sqrt{t} Y_{\frac{1}{2q}}(p_n t^q),$$

где $\gamma_n = \frac{1}{2q} \Gamma\left(\frac{1}{2q}\right) \left(\frac{p_n}{2}\right)^{-\frac{1}{2q}}$, $(p_n q)^2 = \lambda_n^4 + b^2$.

Тогда решение задачи (1) представляется в виде ряда

$$u(x, t) = \left\{ \left[\gamma_0^{-1} \frac{\varphi_0}{2q} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2q} + \gamma_0 \psi_0 \right] \sqrt{t} J_{\frac{1}{2q}}(p_0 t^q) - \gamma_0^{-1} \frac{\varphi_0}{2q} \sqrt{t} Y_{\frac{1}{2q}}(p_0 t^q) \right\} X_0(x) + \quad (10)$$

$$+ \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\gamma_n^{-1} \frac{\varphi_{in}}{2q} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2q} + \gamma_n \psi_{in} \right] \sqrt{t} J_{\frac{1}{2q}}(p_n t^q) - \gamma_n^{-1} \frac{\varphi_{in}}{2q} \sqrt{t} Y_{\frac{1}{2q}}(p_n t^q) \right\} X_{in}(x).$$

Таким образом, мы построили формальное решение задачи (1)-(3) в виде (10).

Теперь нам нужно доказать $u(x, t) \in C_{x,t}^{4,2}(\bar{\Omega})$. В области $\bar{\Omega}$ покажем равномерную сходимость рядов

$$u_{tt}(x, t) = \left\{ -\gamma_0 \psi_0 q J_{\frac{1}{2q}}(p_0 t^q) - \gamma_0^{-1} \frac{\varphi_0}{2} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2q}} J_{\frac{1}{2q}}(p_0 t^q) \right\} p_0^2 q t^{2q-\frac{3}{2}} X_0(x) + \quad (11)$$

$$+ \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\gamma_n \psi_{in} q J_{\frac{1}{2q}}(p_n t^q) - \gamma_n^{-1} \frac{\varphi_{in}}{2} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2q}} J_{\frac{1}{2q}}(p_n t^q) \right\} p_n^2 q t^{2q-\frac{3}{2}} X_{in}(x),$$

$$u_{xxxx}(x, t) = \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\gamma_n^{-1} \frac{\varphi_{in}}{2q} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2q} + \gamma_n \psi_{in} \right] \sqrt{t} J_{\frac{1}{2q}}(p_n t^q) - \right. \quad (12)$$

$$\left. - \gamma_n^{-1} \frac{\varphi_{in}}{2q} \sqrt{t} Y_{\frac{1}{2q}}(p_n t^q) \right\} \lambda_n^4 X_{in}(x).$$

Пусть $0 \leq t \leq \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Используем асимптотические формулы для функций Бесселя в окрестности $t = 0$ [3]

$$J_\nu(x) \approx \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}$$

оценим функции, определенным равенством (11)

$$|u_{tt}(x, t)| \leq C_1 + C_2 \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ |\gamma_n| |\psi_{in}| p_n^2 p_n^{\frac{1}{2q}} + |\gamma_n^{-1}| |\varphi_{in}| p_n^2 p_n^{-\frac{1}{2q}} \right\} \leq (13)$$

$$\leq C_1 + C_3 \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} p_n^2 (|\psi_{in}| + |\varphi_{in}|) \leq C_1 + C_4 \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^4 (|\psi_{in}| + |\varphi_{in}|).$$

Пусть $0 < \varepsilon \leq t \leq \beta$. Тогда на основании поведения функция Бесселя в бесконечности [3]

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi \nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

оценим функции (11)

$$|u_{tt}(x, t)| \leq C_1 + C_5 \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ |\gamma_n| |\psi_{in}| p_n^2 p_n^{-\frac{1}{2}} + |\gamma_n^{-1}| |\varphi_{in}| p_n^2 p_n^{-\frac{1}{2}} \right\} \leq$$

$$\leq C_1 + C_6 \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} p_n^2 \left\{ |\psi_{in}| p_n^{-\frac{1}{2}-\frac{2}{2q}} + |\varphi_{in}| p_n^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2q}} \right\} \leq C_1 + C_6 \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^4 (|\psi_{in}| + |\varphi_{in}|). \quad (14)$$

Функций $\varphi(x), \psi(x)$ разлагаются в биортогональный ряд

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi_0 X_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_{1n} X_{1n}(x) + \varphi_{2n} X_{2n}(x)], \\ \psi(x) &= \psi_0 X_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [\psi_{1n} X_{1n}(x) + \psi_{2n} X_{2n}(x)],\end{aligned}$$

где коэффициенты $\varphi_0, \varphi_{1n}, \varphi_{2n}, \psi_0, \psi_{1n}, \psi_{2n}$ вычисляются по формулам

$$\varphi_0 = \int_0^1 \varphi(x) Y_0(x) dx, \varphi_{1n} = \int_0^1 \varphi(x) Y_{1n}(x) dx, \varphi_{2n} = \int_0^1 \varphi(x) Y_{2n}(x) dx, \quad (15)$$

$$\psi_0 = \int_0^1 \psi(x) Y_0(x) dx, \psi_{1n} = \int_0^1 \psi(x) Y_{1n}(x) dx, \psi_{2n} = \int_0^1 \psi(x) Y_{2n}(x) dx. \quad (16)$$

Интегрируя по частям пять раз второй и третий интегралы в (15), (16) получаем:

$$\begin{aligned}\varphi_{1n} &= \frac{1}{\lambda_n^5} \frac{e^{\lambda_n}}{e^{\lambda_n} - 1} [-a_{1n} + b_{1n}] + \frac{1}{\lambda_n^5} \bar{\varphi}_{1n}^{(5)}, \varphi_{2n} = \frac{1}{\lambda_n^5} \bar{\varphi}_{2n}^{(5)}, \\ \psi_{1n} &= \frac{1}{\lambda_n^5} \frac{e^{\lambda_n}}{e^{\lambda_n} - 1} [-a_{2n} + b_{2n}] + \frac{1}{\lambda_n^5} \bar{\psi}_{1n}^{(5)}, \psi_{2n} = \frac{1}{\lambda_n^5} \bar{\psi}_{2n}^{(5)},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}a_{1n} &= \int_0^1 \varphi^{(5)}(x) e^{-\lambda_n(1-x)} dx, b_{1n} = \int_0^1 \varphi^{(5)}(x) e^{-\lambda_n x} dx, \\ a_{2n} &= \int_0^1 \psi^{(5)}(x) e^{-\lambda_n(1-x)} dx, b_{2n} = \int_0^1 \psi^{(5)}(x) e^{-\lambda_n x} dx, \\ \bar{\varphi}_{1n}^{(5)} &= \int_0^1 \varphi^{(5)}(x) \cos \lambda_n x dx, \bar{\varphi}_{2n}^{(5)} = 2 \int_0^1 \varphi^{(5)}(x) \sin \lambda_n x dx, \\ \bar{\psi}_{1n}^{(5)} &= \int_0^1 \psi^{(5)}(x) \cos \lambda_n x dx, \bar{\psi}_{2n}^{(5)} = 2 \int_0^1 \psi^{(5)}(x) \sin \lambda_n x dx.\end{aligned}$$

Если значения $\varphi_{in}, \psi_{in}, i = 1, 2$ подставить в (13) и (14), то нетрудно увидеть, что эти ряды сходятся абсолютно в области $\bar{\Omega}$. Тогда на основании признака Вейерштрасса, ряды в (11) сходятся абсолютно и равномерно в области $\bar{\Omega}$. Из сходимости рядов (11) следуют сходимости (12). Единственность решения задачи следует из представления (10), а также из полноты системы (5). Теорема доказана.

Литература

1. Аманов Д. Разрешимость и спектральные свойства краевых задач для уравнений чётного порядка. Автореф. дис. ... докт. физ. – мат. наук. – Ташкент: АН РУз, 2019. – С. 64.
2. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвёртого порядка. – Ташкент: “Фан”, 2000, – С.144.
3. Дунаев А.С., Шлычков В.И. Специальные функции. – Екатеринбург: 2015.
4. Кадиркулов Б.Ж. Об одной обратной задаче для параболического уравнения четвёртого порядка // Узбекский математический журнал. – Ташкент: 2012, №1. – С. 74-80.
5. Сабитова Ю.К. Нелокальные начально-граничные задачи для вырождающегося гиперболического уравнения // Известия вузов. Математика. 2009. №12, –С. 49-58.
6. Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. Начально-граничная задача для неоднородных вырождающихся уравнений смешанного парабола-гиперболического типа // Итоги науки и техники. Современная математика и приложения. Тематические обзоры. Том 137 (2017). –С. 26-60.
7. Сидоров С.Н. Нелокальные задачи для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа со степенным вырождением. // Известия вузов. Математика. 2015, №12, –С. 55-65.

РЕЗЮМЕ

Мақолада тўртбурчаклар тизимида тўртинчи тартибли тенглама учун нолокал масала ечимининг ноёблиги ва мавжудлиги мезони белгиланди.

РЕЗЮМЕ

В статье для прямоугольной области установлен критерий единственности и существования решения нелокальной задачи для уравнения четвёртого порядка.

SUMMARY

In the rectangular domain, it was established a criterion for the uniqueness and existence of a solution of the nonareal problem of a fourth-order equation.