

ТАБИЙЙ ҺАМ ТЕХНИКАЛЫҚ ИЛИМЛЕР

Физика. Математика. Информатика.

FAZODA TEKISLIKKA VA TO'G'RI CHIZIQQA NISBATAN SIMMETRIK ALMASHTIRISHLARNING UMUMLASHGAN FORMULALARI

S.X.Abjalilov – fizika-matematika fanlari nomzodi

Navoiy davlat pedagogika instituti

Tayanch so'zlar: harakat, oriyentatsiya, simmetriyasi, parallel ko'chirish, chiziqli tenglamalar sistemasi, Kramer usuli, kesma o'rtasi.

Ключевые слова: движение, ориентация, симметрия, параллельный перенос, система линейных уравнений, метод Крамера, середина отрезка.

Key words: movement, orientation, symmetry, parallel transference, system of linear equation, method of Kramer, middle stretch.

Matematika, fizika, mexanika va boshqa fundamental fanlar, jumladan, geometriyada harakat ikki nuqta orasidagi masofani saqlovchi almashtirish sifatida ta'riflanadi. Harakatlar oriyentatsiyani saqlash xossasiga ko'ra tekislikda ikki turga ajratilgan beshta asosiy harakat turlarini o'z ichiga oladi. Bular: parallel ko'chirish, burish va markaziy simmetriya (I tur), o'q simmetriyasi va sirpanuvchi simmetriya (II tur). Darslik va o'quv qo'llamalarda harakat turlarining analitik ifodalari asosan sodda va xususiy hollar uchungina keltirilgan [1]. Tekislikdagi harakatlarning umumlashgan holatlardagi analitik ifodalarini aniqlash metodikalari ularning ta'rifi va xossalriga asoslanadi [2-5].

Fazoda harakatlarning asosiy turlari parallel ko'chirish, to'g'ri chiziqli atrofida burish (I tur) va tekislikka nisbatan simmetriya (II tur) hisoblanadi. Fazodagi boshqa harakat turlari ularning kompozitsiyalari yordamida hosil qilinadi. Masalan, vint bo'yicha harakat - to'g'ri chiziqli atrofida burish va shu to'g'ri chiziqli yo'nalishida parallel ko'chirish, burish simmetriyasi - tekislikka nisbatan simmetriya va unga perpendikulyar to'g'ri chiziqli atrofida burish, sirpanuvchi simmetriya - tekislikka nisbatan simmetriya va unga parallel vektor bo'yicha parallel ko'chirishlar ko'paymasidan hosil qilinadi [1].

Mazkur maqola fazoda tekislikka va to'g'ri chiziqli nisbatan simmetrik almashtirishlar haqida hamda fazoda ularning umumlashgan formulalarini keltirib chiqarishga bag'ishlangan. Bu jarayonni amalga oshirish quyidagicha ketma-ketlik asosida olib boriladi.

Fazoda α tekislik berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Tekislikning M va M' nuqtalari uchun MM' kesma α tekislikka perpendikulyar bo'lib, MM' kesmaning o'rtasi α tekislikda yotsa, u holda bu nuqtalar α tekislikka nisbatan simmetrik deb ataladi.

Ta'rif. Fazoning har bir M nuqtasiga α tekislikka nisbatan simmetrik bo'lgan M' nuqtani mos keltiruvchi almashtirish tekislik simmetriyasi deyiladi.

O'quvchi va talabalar tekislik simmetriyasining xususiy hollari uchun analitik ifodalarni yaxshi bilishadi. Masalan, tekislik sifatida XOY tekisligi olinsa, fazoning istalgan M(x,y,z) nuqtasiga ushbu tekislikka nisbatan simmetrik bo'lgan M'(x,y,-z) nuqta mos keltiriladi. Bunga ko'ra ushbu xususiy hol uchun analitik ifoda ko'rinishda ifodalanadi:

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y, \\ z' = -z. \end{cases} \quad (1)$$

Ushbu analitik ifodadan foydalangan holda qator masalalarni yechish bilan birga, tekislik simmetriyasining barcha xossalarni tahlil etish mumkin. Shuningdek, noma'lumlar oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan uchinchi tartibli determinant -1 ga tengligidan, harakat ikkinchi tur ekanligini ham ta'kidlab o'tish lozim.

Ta'rif asosida nuqtaning tekislikka nisbatan simmetrik obrazini topishning analitik ifodasini topish bilan shug'ullanamiz (1-chizma).

Faraz qilaylik, bizga fazoda M(x,y,z) nuqta va α tekislik o'zining umumiy tenglamasi $Ax+By+Cz+D=0$ bilan berilgan bo'lsin. M nuqtaning α tekislikka nisbatan simmetrik obrazini M'(x',y',z') deb olaylik.

Birinchi ma'lumot, MM' kesmaning o'rtasi $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqta bo'lib, uning koordinatalari

$$x_0 = \frac{x'+x}{2}, \quad y_0 = \frac{y'+y}{2}, \quad z_0 = \frac{z'+z}{2}$$

ko'rinishda hamda bu nuqta tekislikka tegishlidir.

Ikkinchi ma'lumot, $\vec{MM'}$ vektor va tekislikning $\vec{n}(A,B,C)$ normal vektori kollinear ekanligidan $\vec{MM'} = t\vec{n}$ munosabat o'rinni bo'lib, quyidagi tengliklarni hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x' - x = tA, \\ y' - y = tB, \\ z' - z = tC. \end{cases} \quad (2)$$

M_0 nuqtaning koordinatalarini tekislik tenglamasiga qo'yamiz,

$$A\frac{x'+x}{2} + B\frac{y'+y}{2} + C\frac{z'+z}{2} + D = 0. \quad (3)$$

(2) tenglikdan x' , y' , z' larni aniqlab, (3) tenglikka qo'ysak, undan t parametr aniqlanadi:

$$t = \frac{-2(Ax+By+Cz+D)}{A^2+B^2+C^2}. \quad (4)$$

t parametrning topilgan qiymatini (2) ga qo'yib x' , y' , z' o'zgaruvchilarni x, y, z o'zgaruvchilar orqali ifodalarini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x' = x - 2A \frac{Ax+By+Cz+D}{A^2+B^2+C^2}, \\ y' = y - 2B \frac{Ax+By+Cz+D}{A^2+B^2+C^2}, \\ z' = z - 2C \frac{Ax+By+Cz+D}{A^2+B^2+C^2}. \end{cases} \quad (5)$$

(5) - formula fazoda tekislik simmetriyasining umumlashgan analitik ifodasi bo'ladi. Bu formulalardan tekislik simmetriyasining bizga tanish bo'lgan yuqoridagi xususiy hollardagi formulalarining kelib chiqishini ko'rishimiz mumkin. Buning uchun umumlashgan analitik ifodaga $A=B=D=0, C=1$ qiymatlarni qo'yish kifoya.

Maqolada nazarda tutilgan ikkinchi masala fazoda to'g'ri chiziqli nisbatan simmetrik almashtirishni qaraylik. Fazoda berilgan to'g'ri chiziqli nisbatan simmetrik almashtirishda nuqtaning orazini topish uchun berilgan nuqtadan o'tuvchi va to'g'ri chiziqli perpendikulyar tekislik o'tkazamiz. Ularning umumiy nuqtasi berilgan nuqta va uning obrazi hosil qilgan kesmaning o'rtasi bo'ladi. Kesmaning boshi va o'rtasi ma'lum bo'lgan holda uning oxiri topiladi (2-chizma).

Albatta, ushbu almashtirish to'g'ri chiziqli atrofida burishning $\alpha = \pi$ bo'lgandagi xususiy holi ekanligini ta'kidlab o'tish lozim.

Bizga fazoda u to'g'ri chiziqli o'zining oshkormas tenglamasi, ya'ni ikki tekislikning kesishishi ko'rinishida berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$M(x, y, z)$ ($M \in u$) nuqtaning to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik obrazi $M'(x'; y'; z')$, M_0 nuqta esa MM' kesmaning o'rtasi bo'lsin. Tabiiyki, bu nuqta berilgan to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lib, M nuqtaning u to'g'ri chiziqdagi ortogonal proyeksiyasi bo'ladi.

Ma'lumki, $\vec{u} \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right)$ vektor u to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori bo'lib, qulaylik uchun uni $\vec{u}(A, B, C)$ ko'rinishda belgilaylik. M nuqtadan o'tib, u to'g'ri chiziqqa perpendikulyar tekislik

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad \text{yoki}$$

$$Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0.$$

Bu yerda $-(Ax_0 + By_0 + Cz_0) = D$ belgilash olsak,

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (7)$$

Ushbu tekislik va berilgan to'g'ri chiziq kesishishidan hosil bo'lgan nuqta izlanayotgan M_0 nuqta bo'ladi. (6) va (7) tenglamalarni birgalikda yechish

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases} \quad (8)$$

chiziqli tenglamalar sistemani yechishga keladi.

Bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda Kramer usulidan foydalanaylik. So'ngra kesma o'rtasi koordinatalarini topish formulalaridan nuqta obrazi topiladi.

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A & B & C \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} -D_1 & B_1 & C_1 \\ -D_2 & B_2 & C_2 \\ -D & B & C \end{vmatrix},$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & -D_2 \\ A & B & -D \end{vmatrix}$$

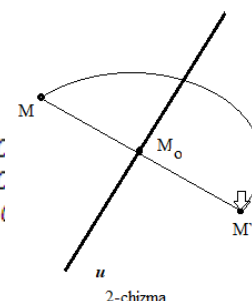
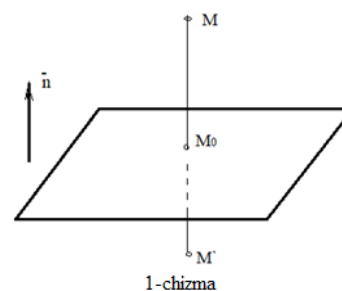
$$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta_0}, \quad y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta_0}, \quad z_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta_0}.$$

M' nuqtaning koordinatalari

$$x' = 2 \frac{\begin{vmatrix} -D_1 & B_1 & C_1 \\ -D_2 & B_2 & C_2 \\ -D & B & C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A & B & C \end{vmatrix}} - x; \quad y' = 2 \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -D_1 & C_1 \\ A_2 & -D_2 & C_2 \\ A & -D & C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A & B & C \end{vmatrix}} - y;$$

$$z' = 2 \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & -D_2 \\ A & B & -D \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A & B & C \end{vmatrix}} - z$$

ko'rinishda ifodalanadi. Topilgan ushbu formulalar fazoda to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik almashtirishning analitik ifodasi bo'ladi.



Adabiyotlar

1. Dodajonov N.D., Jo'rayeva M.Sh. Geometriya. I qism. -T.: "O'qituvchi", 1982, 368-b.
2. Abjalilov S.X., Abjalilov B.X., Boltayeva M.X. Tekislikda burish va o'q simmetriyasining umumiy formulasi. Fizika, matematika va informatika. -Toshkent: Ilmiy-uslubiy jurnal, 6-son 2010, 43-45-b
3. Abjalilov S.X., Ibodullayeva N. Tekislikda harakatlar va ularning analitik ifodasi. Pedagogik ta'lim, Ilmiy-nazariy va metodik jurnal, 3-son, ToshDPU, 2011, 52-55-b.
4. Abjalilov S.X., Usanov B. Sirpanuvchi simmetriya va uning formulasi. "Aniq fanlarni kasbga yo'naltirib o'qitish muammolari va yechimlari" mavzusidagi Respublika ilmiy-amaliy konferensiya materiallari to'plami, NavDPI 2018, 2-b.
5. Abjalilov S.X. Tekislikda akslantirishlar va almashtirishlar (uslubiy qo'llanma), NDPI kichik bosmaxonasi 2017, 32-b.
6. Abjalilov S.X., Toshhiyozova Yu. Tekislikka nisbatan simmetriyaning umumiy formulasi. "Хозирги замон аниқ ва техник фанлар муаммолари ва уларнинг ечимлари", Республика илмий-назарий анжуман материаллари, 9-10-б. -Нукус: 2017, 2-б.

REZYUME

Maqolada fazodagi harakatlar va ularning analitik ifodalari haqida so'z boradi. Fazoda tekislik va to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik almashtirishning umumlashgan formulasini aniqlashning bir usuli keltirilgan.

РЕЗЮМЕ

В данной статье приводятся аналитические выражения движений в пространстве. Излагается методика нахождения обобщённой формулы симметрии на прямой линии и плоскости в пространстве.

SUMMARY

The article contains information about the analytical expression of actions in space. It presents the methodology of finding the generalized formula of symmetry in straight line and plane in space.