

УДК 517.9

ЭНЕРГИЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

К.К.Елгондиев - кандидат физико-математических наук, доцент

С.Р.Матмуратова - студентка

Каракалпакский государственный университет имени Бердаха

Таянч сўзлар: осциллятор, энергия, тўлик энергия, дифференциал тенгламалар.

Ключевые слова: осциллятор, энергия, полная энергия, дифференциальные уравнения.

Key words: oscillator, energy, total energy, differential equations.

Как известно полная энергия гармонического осциллятора

$$\ddot{x} + w^2 x = 0 \quad (1)$$

выражается по формуле

$$E(t) = \frac{m}{2} [\dot{x}^2(t) + w^2 x^2(t)],$$

где

$$x(t) = x_0 \cos w(t - t_0) + \frac{\dot{x}_0}{w} \sin w(t - t_0),$$

решения уравнения (1), а x_0 и $\dot{x}_0$ начальные состояния системы.

Эта энергия является величиной постоянной равной

$$E_0 = E(t_0) = \frac{m}{2} [\dot{x}_0^2(t) + w^2 x_0^2(t)]. \quad (2)$$

В случае, когда рассматриваются вынужденные колебания осциллятора, т.е. когда

$$\ddot{x} + w^2 x = f(t), \quad (3)$$

энергию вносимую в колебательную систему внешней силой $f(t)$, согласно [1], можно записать в виде

$$E(t) = \frac{m}{2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iwt} dt \right|^2,$$

где предполагается, что в начальный момент времени ($t_0 = -\infty$) система находится в состоянии $x_0 = \dot{x}_0 = 0$.

Если внешняя сила $f(t)$ имеет импульсный характер, т.е. её действие происходит в течение весьма малого промежутка времени (длительность действия силы намного меньше чем $\frac{1}{w}$), то энергию вносимую внешней силой можно вычислить по формуле

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \right|^2,$$

где, учтено, что в данном случае $e^{-iwt} \approx 1$.

Пусть момент времени $t = t_0$, является началом отчёта для вычисления полной энергии на промежутке $[t_0; +\infty)$.

Тогда, если $x_0, \dot{x}_0$ начальное состояние системы при $t = t_0$, а внешняя сила $f(t)$ имеет импульсный характер и действует согласно закону

$$F(t) = \begin{cases} f(t), & \text{если } t \in [t, -\delta, t_1], \\ 0, & \text{если } t \notin [t, -\delta, t_1], \end{cases} \quad (4)$$

где $t_1 > t_0$, то полную энергию системы, вносимой внешней силой можно вычислить по формуле

$$E(t) = \frac{m}{2} [\dot{x}^2(t) + w^2 x^2(t)],$$

где

$$x(t) = x_0 \cos w(t - t_0) + \frac{\dot{x}_0}{w} \sin w(t - t_0) + \frac{1}{w} \int_{t_0}^t F(\tau) \sin w(t - \tau) d\tau.$$

Считая, что $\delta > 0$ является достаточно малым числом и принимая во внимание формулу (3), для $t \gg t_1$ имеем

$$E(t) = \frac{m}{2} \left[\left(\dot{x}_0 + \int_{t_1 - \delta}^{t_1} F(\tau) \cos w(t - \tau) d\tau \right)^2 + w^2 \left(x_0 + \frac{1}{w} \int_{t_1 - \delta}^{t_1} F(\tau) \sin w(t - \tau) d\tau \right)^2 \right].$$

Откуда следует, что при импульсном характере действия возмущающей силы полная энергия гармонического осциллятора, совершающего вынужденные колебания выражается формулой, аналогичной формуле (2), но с скорректированными начальными данными. Иными словами можно считать, что во время действия внешних сил

импульсной природы происходит коррекция начальных данных гармонического осциллятора, после окончания действия импульсной силы.

$$E(t_1) - E(t_0) = 2m \sin \frac{w(t_1 - t_0)}{2} \int_{t_1 - \delta}^{t_1} F(\tau) \left[w x_0 \cos \frac{w(t_1 + t_0 - 2\tau)}{2} - \dot{x}_0 \sin \frac{w(t_1 + t_0 - 2\tau)}{2} \right] d\tau.$$

Другой математической идеализацией влияния сил импульсной природы на колебательные системы является предположение о мгновенном изменении количества движения системы в некоторый момент времени $t = \tau_1$.

В таких случаях для математического описания колебания гармонического осциллятора вместе с уравнением (1), который рассматривается при $t \neq \tau_1$, используют дополнительное условие

$$\Delta \dot{x}\Big|_{t=\tau_1} = \dot{x}(t_1 + 0) - \dot{x}(t_1 - 0) = I_1,$$

который называется условием импульсного воздействия [2], более общем случае задача формулируется следующим образом: изучить свойства непрерывных функций $x(t)$, которых при $t \neq \tau_k$, $t_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$, $\tau_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$ удовлетворяют уравнению (1), а при $t = \tau_k$ удовлетворяют условиям импульсных воздействий

$$\Delta \dot{x}|_{t=\tau_k} = \dot{x}(\tau_k + 0) - \dot{x}(\tau_k - 0) = I_k, \quad (5)$$

где I_k , $k \in N$ – некоторые заданные числовые величины. Уравнение (1) при условий (5) называется дифференциальным уравнением гармонического осциллятора с импульсным воздействием [2].

Колебания в таком осцилляторе происходят согласно закону [3]

$$x(t) = x_0 \cos w(t - t_0) + \frac{\dot{x}_0}{w} \sin w(t - t_0) + \frac{1}{w} \sum_{t_0 < \tau_k \leq t} I_p \sin w(t - \tau_k).$$

эта формула дает значения решения $x(t)$ задачи (1), (5) для произвольного (фиксированного) момента времени t и учитывает воздействия некоторых внешних сил импульсной природы состоявшихся на промежутке $[t_0, t]$, следствием которых являются условия (5).

Для задачи (1), (5) полную энергию системы можно записать при помощи формулы.

$$E(t) = \frac{m}{2} [\dot{x}^2(t) - w^2 x^2(t)] = \frac{m}{2} \left[\left(\dot{x}_0 + \sum_{k=1}^n I_k \cos w(\tau_k - t_0) \right)^2 + w^2 \left(x_0 - \frac{1}{w} \sum_{k=1}^n I_k \sin w(\tau_k - t_0) \right)^2 \right].$$

Влияние одного импульсного воздействия на изменение полной энергии системы с начальным положением $x_0 = \dot{x}_0 = 0$ имеет вид:

[illegible]

Отсюда нетрудно видеть, что в случае выполнения условия

$$w(\tau_k - \tau_p) = \frac{\pi}{2} + r_{kp} \cdot \pi,$$

где r_{kp} , $p = \overline{1, k-1}$, – некоторые целые числа, имеем

$$E(\tau_k) - E(\tau_{k-1}) = \frac{m}{2} I_k^2 \quad (6)$$

к сожалению не существует такой последовательности моментов времени, чтобы при каждом $k \in N$ имело место соотношение (6).

Если помимо импульсных сил вида (5) гармонический осциллятор подвергается влиянию внешней силы $F(t)$ импульсной природы вида (4), то для $t > t_1$ полная энергия системы (3), (5) вычисляется при помощи формулы

$$\begin{aligned} E(t) = & \frac{m}{2} \left[\dot{w}^2 x^2(t) + \dot{x}^2(t) \right] = \frac{m}{2} \left[w^2 \left(x_0 \cos w(t-t_0) + \frac{\dot{x}_0}{w} \sin w(t-t_0) + \right. \right. \\ & + \frac{1}{w} \sum I_k \sin w(t-\tau_k) + \left. \frac{1}{w} \int_{t_0}^t f(\tau) \sin w(t-\tau) d\tau \right)^2 + (-x_0 w \sin w(t-t_0) + \dot{x}_0 \cos w(t-t_0) + \\ & + \sum I_k \cos w(t-\tau_k) + \int_{t_0}^t f(\tau) \cos w(t-\tau) d\tau)^2 \Big] = \end{aligned}$$

$$= \frac{m}{2} \left[\left(w x_0 + \sum I_k \sin w(t_0 - \tau_k) + \int_{t_0}^t f(\tau) \sin w(t_0 - \tau) d\tau \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\dot{x}_0 + \sum I_k \cos w(t_0 - \tau_k) + \int_{t_0}^t f(\tau) \cos w(t_0 - \tau) d\tau \right)^2 \right];$$

Важное значение для различных приложений имеет место случай, когда в рассматриваемой системе происходят периодические колебания с некоторым периодом T .

Для существования периодических режимов в системе (3) требуется выполнимость условия $wT \neq 2\pi$. Для существования T периодических решений в системе (1), (5) требуется выполнимость условий:

$\exists n: \forall k \in N$ выполняются условия

$$I_{n+k} = I_k, \quad t_{n+k} = t_k + T, \\ \sum_{k=1}^n I_k \cos w(t_0 - t_k) = 0, \\ \sum_{k=1}^n I_k \sin w(t_0 - t_k) = 0,$$

$wT = 2\pi q_0$, q_0 - некоторое натуральное число.

А в случае системы (3), (5) требуется выполнимость условий:

$\exists n: \forall k \in N$ выполняются условия:

$$I_{n+k} = I_k, \quad t_{n+k} = t_k + T, \quad f(t+T) = f(t), \\ \sum_{k=1}^n I_k \cos w(t_0 - t_k) + \int_{t_0}^{t_0+T} f(\tau) \cos w(t_0 - \tau) d\tau = 0, \\ \sum_{k=1}^n I_k \sin w(t_0 - t_k) + \int_{t_0}^{t_0+T} f(\tau) \sin w(t_0 - \tau) d\tau = 0,$$

$wT = 2\pi q_0$, q_0 - некоторое натуральное число.

При выполнении указанных условий периодичности полная энергия системы вычисляется по формуле

$$E(t) = \frac{m}{2} [\dot{x}^2(t) + w^2 x^2(t)] = \frac{m}{2} \left[\left(\dot{x}_0 + \sum_{t_0 < \tau_k \leq t} I_k \cos w(\tau_k - t_0) \right)^2 + \right. \\ \left. + w^2 \left(x_0 - \frac{1}{w} \sum_{t_0 < \tau_k \leq t} I_k \sin w(\tau_k - t_0) \right)^2 \right]$$

(для случая системы (1), (5))

$$E(t) = \frac{m}{2} [\dot{x}^2(t) + w^2 x^2(t)] = \\ = \frac{m}{2} \left[\left(\dot{x}_0 + \sum_{t_0 < \tau_k \leq t} I_k \cos w(\tau_k - t_0) + \int_{t_0}^t f(\tau) \cos w(\tau_k - \tau) d\tau \right)^2 + \right. \\ \left. + w^2 \left(x_0 - \frac{1}{w} \sum_{t_0 < \tau_k \leq t} I_k \sin w(\tau_k - t_0) - \frac{1}{w} \int_{t_0}^t f(\tau) \sin w(\tau_k - \tau) d\tau \right)^2 \right].$$

(для случая системы (3), (5))

При выполнении вышеуказанных условий периодичности

$$E(t+T) = \frac{m}{2} [\dot{x}^2(t+T) + w^2 x^2(t+T)] = \\ = \frac{m}{2} \left[(-wx_0 \sin w(t+T-t_0) + \dot{x}_0 \cos w(t+T-t_0) + \sum_{t_0 < \tau_k \leq t+T} I_k \cos w(t+T-\tau_k))^2 + \right. \\ \left. + w^2 (x_0 \cos w(t+T-t_0) + \frac{\dot{x}_0}{w} \sin w(t+T-t_0) + \right. \\ \left. + \frac{1}{w} \sum_{t_0 < \tau_k \leq t+T} I_k \sin w(t+T-\tau_k))^2 \right] = E(t)$$

т.е. имеет место равенство $E(t+T) = E(t)$ для системы (1), (5). Аналогично для системы (3), (5) имеем,

$$\begin{aligned}
 E(t+T) &= \frac{m}{2} [\dot{x}^2(t+T) + w^2 x^2(t+T)] = \\
 &= \frac{m}{2} [(-w x_0 \sin w(t+T-t_0) + \dot{x}_0 \cos w(t+T-t_0) + \\
 &+ \sum_{t_0 < \tau_k \leq t+T} I_k \cos w(t+T-\tau_k) + \int_{t_0}^{t_0+T} f(\tau) \cos w(t+T-\tau) d\tau)^2 + \\
 &+ w^2 (x_0 \cos w(t+T-t_0) + \frac{\dot{x}_0}{w} \sin w(t+T-t_0) + \\
 &+ \frac{1}{w} \sum_{t_0 < \tau_k \leq t+T} I_k \sin w(t+T-\tau_k) + \\
 &+ \frac{1}{w} \int_{t_0}^{t_0+T} f(\tau) \sin w(t+T-\tau) d\tau)^2] = E(t).
 \end{aligned}$$

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т1. Механика. 4-е изд. -М.: «Наука», Физ.-мат. Лит. 1988. -С.216.
2. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. -Киев: «Вища школа», 1987. -С.287.
3. Самойленко А.М., Елгондиев К.К. Исследование линейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в R^2 . -Препринт. № 89. 59. -Киев: Ин-т математики АНУССР. -С.32.

РЕЗЮМЕ

Мақолада импульс табиатли ташқи таъсирга учраган гармоник тебраниш системаси учун тўлиқ энергиянинг ўзгариши жараёни ўрганилган. Ушбу тебраниш системасида тўлиқ энергиянинг ўзгариш қонунини тасвирловчи формулалар берилган.

РЕЗЮМЕ

В статье рассматривается задача об изменениях полной энергии гармонического осциллятора, находящегося под действием внешних сил импульсной природы. Для таких колебательных систем приводятся формулы, выражающие законы изменения полной энергии.

SUMMARY

The article deals with the problem of changes in the total energy of a harmonic oscillator under the influence of external forces of a pulsed nature. Formulas expressing the laws of change in the total energy are given for such oscillatory systems.

FIZIKADAN LABORATORIYA DARSLARIDA DASTURIY TIZIMLARDAN FOYDALANISH

M.A.Jalelov - fizika-matematika fanlari nomzodi

X.S.Turekeev - assistent o'qituvchi

A.S.Jalekeshov - assistent o'qituvchi

I.J.Jaksimuratov - magistrant

M.Q.Sultanova - magistrant

Ajiniyoz nomidagi Nukus davlat pedagogika instituti

Tayanch so'zlar: erkin tushish tezlanishi, VideoCom, intensivlik, yo'l, geografik kenglik, diagramma, Path Calibration, Read Pixels from Display, Apply Calibration, Measuring Parameters

Ключевые слова: ускорение свободного падения, VideoCom, интенсивность, путь, географическая широта, диаграмма, Path Calibration, Read Pixels from Display, Apply Calibration, Measuring Parameters

Key words: gravity acceleration, VideoCom, intensity, path, latitude, diagram, Path Calibration, Read Pixels from Display, Apply Calibration, Measuring Parameters

Bugungi kunda darslarni zamonaviy axborot texnologiyalari bilan o'tish keng yo'lga qo'yilgan. Xususan, hozirgi paytda laboratoriya mashg'ulotlari axborot texnologiyalari bilan amalga oshirilmoqda. Ya'ni fizikaviy asboblarning dasturiy tizimlarga ulangan holda jismlarning harakat qonuniyati, tezlanish vaziyatlarini dasturiy tizim orqali bilsak bo'ladi. Bu esa laboratoriya ishlarining bajarilishi va natijalarning samaradorligini oshiradi. Laboratoriya mashg'ulotlarini dasturiy tizim bilan bajarish orqali talabalarning bilimlari yanada mustahkamlanadi [1]. Bu maqolada erkin tushish tezlanishini aniqlash usullaridan biri qarab o'tiladi. Bizga ma'lumki, erkin tushish tezlanishi fizikaning mexanika bo'limida o'rganiladi. Jismning erkin tushishi va yuqoriga tik otigan jismning harakati to'g'ri chiziqli tekis o'zgaruvchan harakatga misol bo'la oladi. Jismlarning bunday harakatini italiyan fizik olimi G.Galiley Piza minorasidan jismlarning erkin tushishi tajribasi orqali aniqlagan. Uning hisobiga ko'ra, havoning qarshiligi bo'lmaganda balandlikdan tashlangan har qanday jism bir xil tezlanish bilan yerga tushadi.

Jisimning "g"- erkin tushish tezlanishini aniqlash bo'yicha tajribani VideoCom qurilmasi yordamida amalga oshiriladi.

Laboratoriya ishini bajarish uchun zarur asboblari:

VideoCom	1 dona
Tutashtiruvchi blok 230 V/12 V/20 W	1 dona
Uch oyoqli kamera	1 dona
VideoCom uchun erkin tashlanuvchi jism	1 dona
Ushlab turuvchi magnit	1 dona
Taglik asosi, V-shaklli, 28 sm	1 dona
Taglik sterjeni, 25 sm	1 dona
Taglik sterjeni, 150 sm	1 dona
Leybold multi qisqichlari	1 dona
4 ulash simlari, 200 sm	1 dona
Qo'shimcha: Windows 95/NT yoki yangiroq versiyali OT o'rnatilgan kompyuter	1 dona

Ishni bajarish tartibi:

• Avvalo texnika xavfsizlik qoidalari haqida tanishib olishi kerak.

Tajriba qurilmasi 1-rasmda keltirilgan.