

Закономерности накопления химических элементов в водах в динамике в течение года таковы, что сформирова-

рованный изначально элементный состав воды как бы сохраняется, не зависимо от времени года.

Литература

1. Атанязова О.А., Константинова Л. Г. Аральский кризис и медико-социальные проблемы Каракалпакстана. – Нукус: «Билим», 2001. –С. 116.
2. Проблема Арала. <http://www.ara121.narod.ru>.

РЕЗЮМЕ

Ушбу маколада Амударё дельтасидан олинган сув намуналарининг таркибидаги кимёвий элементларнинг йил мавсумидаги ўзгариши ўрганилган. Ҳар бир мавсумда олинган сув намуналаридан нейтрон-фаол таҳлил натижасида 30 га яқин кимёвий элементлар аниқланди. Қиш мавсумида ерларни суғорган сувлар коллекторларга, кейин эса Амударёга қайта қуйилиши натижасида унинг ифлосланиши ортганлиги кузатилган.

РЕЗЮМЕ

В статье рассматриваются сезонные колебания химического состава проб воды из дельты Амударьи. В результате нейтронно-активационного анализа проб воды, взятых в каждом сезоне, было идентифицировано около 30 химических элементов. Зимой загрязнение увеличивается в результате промывочных и оросительных вод в коллектор и затем обратно в Амударью.

SUMMARY

The author of the article discusses seasonal variations in the chemical composition of water samples from the Amudarya delta. As a result of neutron activation analysis of water samples taken in each season, about 30 chemical elements were identified. In winter, pollution increased in a result of flushing and irrigation waters into the collector and then back to the Amudarya river.

УДК 517.929.4

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА

А.Т.Кожаметов – кандидат физико-математических наук, доцент

А.Д.Арзиев - кандидат физико-математических наук

Г.С.Тлеубаева - ассистент преподаватель

Нукусский филиал Ташкентского информационно-технологического университета

Таянч сўзлар: Ляпунов функцияси, яриманикланган матрицалар, Ляпуновнинг матрицалик тенгламаси, динамик тизимлар.

Ключевые слова: функция Ляпунова, полуопределённая матрица, матричное уравнение Ляпунова, динамические системы.

Key words: Lyapunov function, semidefinite matrix, Lyapunov matrix equation, dynamical systems.

Рассмотрим линейную дифференциальную систему с постоянными коэффициентами [1:45]

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(t) \in R^n. \quad (1)$$

Решение системы (1), удовлетворяющее начальным условиям $x(t_0) = x_0$, будем обозначать $x(t)$. Функцию Ляпунова будем брать в виде квадратичной формы $v(x) = x^T Hx$ [2:27]. Полная производная в силу системы (1) имеет вид

$$\dot{v}(x(t)) = x^T(t) H \dot{x}(t) + \dot{x}^T(t) H x(t) = x^T(t) [A^T H + H A] x(t). \text{ Если}$$

выбирать симметричную положительно определённую матрицу H таким образом, чтобы полная производная функции $v(x)$ в силу системы (1) равнялась заранее заданной отрицательно определённой квадратичной форме ([2])

$$\dot{v}(x(t)) = -x^T(t) C x(t)$$

то нахождение матрицы H сводится к решению матричного уравнения Ляпунова

$$A^T H + H A = -C \quad (2)$$

Если матрица A асимптотически устойчива, то уравнение (2) имеет единственное решение. Причём, если матрица C положительно определённая, то и полученная матрица H также положительно определена.

При решении прикладных задач важное значение имеет не только установление факта устойчивости, но и вычисления функции $\delta(\varepsilon)$, характеризующее величину перерегулирования. Область $U_\delta = \{x: |x| < \delta(\varepsilon)\}$ назовем областью начальных возмущений. С помощью функции Ляпунова $v(x) = x^T Hx$ область U_δ можно получить следующим образом.

Для квадратичных функций справедливо неравенства

$$\lambda_{\min}(H) |x|^2 \leq \sigma(x) \leq \lambda_{\max}(H) |x|^2 \quad (3)$$

где $\lambda_{\min}(H)$, $\lambda_{\max}(H)$ наименьшее и наибольшее собственные числа матриц. Для полной производной функции в силу (1) будет выполняться

$\dot{\sigma}(x) \leq -\lambda_{\min}(C) |x|^2$. Используя неравенство (3), получаем

$$\frac{d\sigma}{dt} \leq -\frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)} \sigma(x)$$

и полученное дифференциальное неравенство, имеет вид

$$\sigma(x(t)) \leq \sigma(x_0) \cdot e^{-\frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)} (t - t_0)}.$$

Отсюда, вновь используя неравенство (3), имеем

$$|x(t)| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}} |x_0| \exp \left\{ -\frac{\lambda_{\min}(C)}{2\lambda_{\max}(H)} (t - t_0) \right\}. \quad (4)$$

Поскольку решение $x(t) \equiv 0$ системы (1) асимптотически устойчиво, то из последнего соотношения (4) получаем

$$\sup_{t \geq t_0} \{ |x(t)| \} = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}} |x_0|$$

Или, с использованием величин ε и $\delta(\varepsilon)$ имеем

$$\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}} \cdot \delta(\varepsilon) \leq \varepsilon$$

Таким образом, для оценки начальных возмущений U_δ имеет место следующая зависимость

$$\delta(\varepsilon) \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}} \cdot \varepsilon.$$

Очевидно, что точность оценки существенно зависит от выбора функции Ляпунова $\sigma(x) = x^T H x$ и будет тем точнее, чем меньше величина $\lambda_{\max}(H) / \lambda_{\min}(H)$. Если обозначить $\phi_1(H) = \lambda_{\max}(H) / \lambda_{\min}(H)$ и рассматривать задачу минимизации функции $\phi_1(H)$ на множестве решений уравнения Ляпунова, то придем к следующей задаче математического программирования. Требуется найти

$$H_0 = \arg \inf_{G(H)} \{ \phi_1(H) \},$$

где $G(H)$ – множество положительно определенных матриц H , при которых $A^T H + H A$ отрицательно определены.

Определение ([2:37], [3:38]). Функцию Ляпунова $\sigma_0(x) = x^T H_0 x$, у которой

$$H_0 = \arg \inf_{H \in G(H)} \{ \phi_1(H) \}, \quad \phi_1(H) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}} \quad (5)$$

назовем оптимальной для оценки начальных возмущений.

Нетрудно заметить, что $1 \leq \phi_1(H) < \infty$. Поэтому наилучшей из всех функций Ляпунова (в зависимости от вида матриц A) будет такая, при которой $\phi_1(H_0) = 1$, т.е. $\sigma_0(x) = |x|^2$. Геометрически $\phi_1(H)$ определяет отношение осей эллипса, представляющего собой поверхность уровня функции Ляпунова $\partial \sigma^\alpha = \{x : \sigma(x) = \alpha\}$. Наилучшей из функций Ляпунова будет сферическая.

Приведем необходимые и достаточные условия существования оптимальной функции Ляпунова, для которой $\phi_1(H_0) = 1$,

Теорема. Уравнение Ляпунова (2) имеет решением матрицу $H_0 \in G(H)$, для которой $\phi_1(H_0) = 1$, тогда и только тогда, когда $A + A^T$ отрицательно определенная матрица.

Доказательство. Необходимость. Пусть существует положительно определенная матрица C_0 , при которой уравнение (2) имеет решение H_0 , для которого $\phi_1(H_0) = 1$. Как известно, для произвольной симметричной матрицы H существует ортогональная матрица U , такая, что $U^T H U$ имеет диагональную структуру, причем $U^T U = E$. И поскольку $\lambda_{\max}(H) / \lambda_{\min}(H) = 1$, т.е.

$$\lambda_1(H_0) = \lambda_2(H_0) = \dots = \lambda_m(H_0) = \lambda, \text{ то}$$

$U^T H_0 U = \lambda E$. Причем так как H_0 положительно определена, то $\lambda > 0$. Отсюда

$$(U^T A U)^T (U^T H_0 U) + (U^T H_0 U) (U^T A U) = -(U^T C_0 U)$$

Поскольку

$$\lambda_1(H_0) = \lambda_2(H_0) = \dots = \lambda_m(H_0) = \lambda, \text{ то}$$

$$U^T A^T U + U^T A U = -\frac{1}{\lambda} U^T C_0 U. \text{ Таким образом}$$

$A + A^T = -\frac{1}{\lambda} C_0$ – отрицательно определенная матрица.

Достаточность. Пусть $A + A^T$ отрицательно определенная матрица. Положив $C_0 = -(A + A^T)$ получим $H_0 = E$ и, следовательно, $\lambda_{\max}(H_0) \setminus \lambda_{\min}(H_0) = 1$.

Поскольку множество $G(H)$ представляет собой открытый конус, возможно ситуация, когда положительно определенная матрица H_0 , для которой $\phi_1(H_0) = 1$, принадлежит граница конуса.

Лемма. Пусть для произвольного $\varepsilon > 0$ существует симметричная положительно определенная матрица C_ε такая, что для H_ε , являющейся решением матричного уравнения Ляпунова, $\phi_1(H_\varepsilon) < 1 + \varepsilon$. Тогда существует последовательность $\{C_k\}$, $k = 1, 2, \dots$ симметрических положительно определенных матриц, сходящаяся к симметрической положительно полуопределенной матрице $\bar{C}$ и соответствующая её последовательность $\{H_k\}$, $k = 1, 2, \dots$ сходящаяся к положительно определенной матрице $\bar{H}$ причем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi_1(H_r) = \phi_1(\bar{H}) = 1.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon = 1/k$ и $\phi_1(H_k) < 1 + 1/k$. Разделив уравнение Ляпунова на $|C_k|$, получим $A^T \frac{H_r}{|C_r|} + \frac{H_r}{|C_r|} A = -\frac{C_r}{|C_r|}$

И так как собственные числа при этом изменились пропорционально, то без ограничения общности, будем считать, что $|C_k| = 1 \quad k = 1, 2, \dots$

(здесь $C_k = \lambda_{\max}(C_k)$). Равенство $|C_k| = 1$ означает, что последовательность $\{C_k\}$ принадлежит сфере единичного радиуса, и в силу её компактности на последовательности $\{C_k\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{C_{km}\} \rightarrow \bar{C}$ причем $\bar{C}$ положительно полуопределенная. Поскольку, A асимптотически устойчивая, то для собственных чисел

оператора $F[H] = A^T + HA$ будет выполнено $\lambda(F) = \lambda_i(A) + \lambda_j(A) \neq 0, 1 \leq i \leq j \leq n$. Следовательно, оператор $F[H]$ является невырожденным. Поэтому существует и является непрерывной обратный оператор $F^{-1}(C)$, и решение H уравнения Ляпунова непрерывно зависит от C . Таким образом, последовательность $\{H_{km}\}$, также, как и $\{C_{mk}\}$ сходится к некоторой матрице $\bar{H}$. Покажем, что для $\{H_{mk}\}$ справедливо утверждение лемм. Имеем

$$|A^T| |H| + |H| |A| \geq |C|$$

И так как $|C| = 1$, то

$$\lambda_{\max}(H) \geq \lambda_{\max}(C) |2| |A| = 1/2 |A| > 0.$$

В силу непрерывной зависимости корней характеристического уравнения от элементов матрицы

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_{\max}(H_{km}) - \lambda_{\max}(\bar{H}), \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_{\min}(H_{km}) = \lambda_{\min}(\bar{H}).$$

И так как $\lambda_{\max}(\bar{H}) > 0$ и $\lim_{m \rightarrow \infty} \phi_1(H_{km}) = 1$, то

$$\lambda_{\min}(\bar{H}) > 0. \text{ Следовательно}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \phi_1(H_{km}) = \phi_1(\bar{H}) = 1.$$

Теорема. Уравнение Ляпунова (2) имеет решением последовательность положительно определенных матриц $\{H_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, для которой $\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_1(H_k) = 1$, тогда и только тогда, когда $A + A^T$ отрицательно полуопределенная матрица.

Доказательство. Необходимость. Пусть существует последовательность $\{C_k\}$ а следовательно и

$\{H_k\}$, $k = 1, 2, \dots$ для которой $\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_1(H_k) = 1$. Так следует из леммы, можно выбрать подпоследовательности $\{H_{k_m}\}$ и $\{C_{k_m}\}$, сходящаяся к положительно

определенной матрице $\bar{H}$ и положительно полуопределенной матрице $\bar{C}$ причем $\lim_{m \rightarrow \infty} \phi_1(H_{k_m}) = \phi_1(\bar{H}) = 1$.

Умножив уравнение Ляпунова (2) на соответствующую ортогональную матрицу U и проделав преобразования, приведенные в теореме, получим

$$A + A^T = -\frac{1}{\lambda} \bar{C}, \text{ т.е. } A + A^T \text{ положительно полу-}$$

определенная.

Достаточность. Пусть $A + A^T$ отрицательно полуопределенная матрица. Причем последовательность $\{C_k\}$ при которой $\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_1(H_k) = 1$. Пусть

$$C_k = -(A + A^T) + \frac{1}{k} E.$$

Матрица C_k положительно определенная решая уравнения Ляпунова, получаем $H_k = H_k' + E$. Причем H_k' определяется из уравнения

$$A^T H_k' + H_k' A = -\frac{1}{k} E.$$

В силу непрерывной зависимости решения от правой части $\lim_{k \rightarrow \infty} H_k' = 0$, где нулевая матрица. Таким образом $\lim_{k \rightarrow \infty} (H_k) = E$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_1(H_k) = 1.$$

Теорема доказана.

Литература

1. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. – Москва: Изд-во иностранной литературы. -С. 216. 1964.
2. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. –Москва: «Наука», 1970. -С. 140.
3. Валеев К.Г., Фомин Г.П. Построение функции Ляпунова. -Киев: «Наукова думка». 1981. –С. 411

РЕЗЮМЕ

Мақкур мақолада Ляпуновнинг функциялари методи ёрдамида чизикли динамик тизимларнинг турғунлиги масалалари кўриб ўтилган. Унда аниқланган матрицалар ёрдамида Ляпуновнинг матричалик тенгламаси ечимлари мавжуд бўлишининг зарурий ва мавжуд шартлари келтирилган.

РЕЗЮМЕ

В статье рассмотрен вопрос устойчивости линейных динамических систем методом функций Ляпунова. С помощью положительно определенных матриц получены необходимые и достаточные условия существования решения матричного уравнения Ляпунова.

SUMMARY

The article deals with the question of the stability of linear dynamical systems using the Lyapunov function method. Using positive definite matrices, necessary and sufficient conditions for the existence of a solution to the Lyapunov matrix equation are obtained.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДИКИ ECVET ДЛЯ ОПИСАНИЯ БЛОКА РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ «АРХИТЕКТУРА ПЕРСОНАЛЬНОГО КОМПЬЮТЕРА»

А.И.Турениязова – кандидат физико-математических наук

Нукусский филиал Ташкентского информационно-технологического университета

Таянч сўзлар: ECVET, кредит тизими, ўқув натижалари, баҳолаш критерийлари, касб-хунар таълими.

Ключевые слова: ECVET, кредитная система, результаты обучения, критерии оценки, профессиональное образование и обучение.

Key words: ECVET, credit system, learning outcomes, assessment criteria, Vocational Education and Training.

В концепции совершенствования системы образования Республики Узбекистан подчеркивается, что ос-

новной целью образовательной политики нашей страны является обеспечение качества подготовки кадров, от-