

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ФРЕДГОЛЬМА

А.О.Нуржанова – стажёр-преподаватель

Нукусский государственный педагогический институт имени Ажинияза

ФРЕДГОЛЬМ ТИПИДАГИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАЛАРИНИНГ ДАВРИЙ ЕЧИМЛАРИ

А.О.Нуржанова – стажёр-ўқитувчи

Ажиниёз номидаги Нукус давлат педагогика институти

PERIODIC SOLUTIONS OF SYSTEMS OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FREDHOLM TYPE

A.O.Nurzhanova – trainee teacher

Nukus State Pedagogical Institute named after Ajiniyaz

Таянч сўзлар: даврий ечим, проекцион-итератив усул, Фредгольм типигаги интегро-дифференциал тенгламалар.

Резюме. Ушбу мақолада Фредгольм типигаги интегро-дифференциал тенгламаларнинг даврий ечимларини топиш учун проекцион-итератив усул татбиқ этилди.

Ключевые слова: периодическое решение, проекционно-итеративный метод, интегро-дифференциальные уравнения типа Фредгольма.

Резюме. В данной работе проекционно-итеративный метод применён к отысканию периодических решений интегро-дифференциальных уравнений типа Фредгольма.

Key words: periodic solution, projection-iterative method, Fredholm-type integro-differential equations.

Summary. In this work, the projection-iterative method is applied to finding periodic solutions of Fredholm-type integro-differential equations.

Введение. Проекционно-итеративные методы получили широкое применение при исследовании и построении решений различных классов дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений [1-3 и др.].

В данной работе при помощи проекционно-итеративного метода, сочетающего идеи метода Галеркина [5] и численно-аналитического метода Самойленко [4], изучаются периодические решения нелинейных периодических систем интегро-дифференциальных уравнений типа Фредгольма вида

$$\frac{dx}{dt} = f \left(t, x, \int_0^T \varphi(t, s, x(s)) ds \right), \quad (1)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - n -мерный вектор; $f(t, x, y) = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, $\varphi(t, s, x) = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ - n -мерные вектор-функции, $T > 0$ - некоторое заданное число; функции $f(t, x, y)$ и $\varphi(t, s, x)$ предполагаются периодическими, соответственно, по t и (t, s) с периодом 2π , определенными и непрерывными в области

$$(t, s) \in R = (-\infty, \infty), x \in D, y \in D_1 \quad (2)$$

где D и D_1 - ограниченные замкнутые области пространства E_n .

Необходимые обозначения и утверждения.

Обозначим через $\tilde{C}$ пространство 2π -периодических непрерывных n -мерных вектор-

ных функций $u(t)$ с нормой $\|u(t)\|_0 = \max_t \|u(t)\|$, где $\|u(t)\|$ - евклидова норма.

Пусть

$$\tilde{C}_D = \{u(t) \in \tilde{C} : u(t) \in D, t \in [0, 2\pi]\}.$$

Всякой функции $u(t) \in \tilde{C}$ можно сопоставить в соответствие ряд Фурье

$$u(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt). \quad (3)$$

Обозначим через $P_0 u(t)$ нулевой член этого ряда:

$$P_0 u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t) dt.$$

Для любого целого числа $m \geq 1$ положим

$$P_m u(t) = \sum_{k=1}^m a_k \cos kt + b_k \sin kt, \\ \bar{P}_m u(t) = a_0 + P_m u(t).$$

В дальнейшем мы используем следующую лемму.

Лемма [5]. Для функции $u(t) \in \tilde{C}$ имеет место следующие оценки:

$$\left\| \int_0^t I - \bar{P}_m u(s) ds \right\| \leq 2\sqrt{2}\sigma(m)\|u(t)\|, \quad (4)$$

$$\left\| \int_0^t P_m u(s) ds \right\| \leq \pi\|u(t)\|, \quad (5)$$

$$\text{где} \\ \sigma(m) = \begin{cases} \frac{\pi^2}{8} \text{ при } m=0 \\ [(m+1)^{-2} + (m+2)^{-2} + \dots] \text{ при } m=1,2,\dots \end{cases}$$

Основная часть. Предположим, что векторные функции $f(t, x, y)$ и $\varphi(t, s, x)$ в области (2) удовлетворяют следующим условиям:

$$\|f(t, x, y)\| \leq M, \quad (6)$$

$$\|f(t, \bar{x}, \bar{y}) - f(t, \bar{x}, \bar{y})\| \leq K_1 \|\bar{x} - \bar{x}\| + K_2 \|\bar{y} - \bar{y}\|, \quad (7)$$

$$\|\varphi(t, s, \bar{x}) - \varphi(t, s, \bar{x})\| \leq K_3 \|\bar{x} - \bar{x}\| \quad (8)$$

$$q_m = \frac{2\sqrt{2}\sigma(m)Q}{1-\pi Q} < 1, \quad \pi Q < 1,$$

где $Q = K_1 + TK_2K_3$.

Следуя работам [1, 3] для нахождения периодических решений системы уравнений (1) рассмотрим алгоритм, согласно которому последовательность приближений $x_{k+1}(t, x_0)$ определяется из уравнений

$$x_{k+1}(t, x_0) = x_0 + \int_0^t P_m f \left(t, x_{k+1}(t, x_0), \int_0^T \varphi(t, s, x_{k+1}(s, x_0)) ds \right) dt + \\ + \int_0^t I - P_0 - P_m f \left(t, x_k(t, x_0), \int_0^T \varphi(t, s, x_k(s, x_0)) ds \right) dt, \\ x_0 \in D, x_0(t, x_0) = x_0, k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (10)$$

где I - тождественный оператор.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. Пусть правая часть периодической системы уравнений (1) удовлетворяет условиям (6) – (9) и система уравнений (1) имеет периодическое решение $x = \psi(t)$ периода 2π , проходящее при $t=0$ через точку $\psi(0) = x_0 \in D - a(m)$, $a(m) = M \pi + 2\sqrt{2}\sigma(m)$.

Тогда справедливо соотношение

$$\psi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t, x_0) \quad (11)$$

равномерно относительно t, x_0 и

$$|\psi(t) - x_k(t, x_0)|_0 \leq \frac{q_m^k}{1 - q_m} |x_1(t, x_0) - x_0|_0 \quad (12)$$

для всех $k = 0, 1, 2, \dots$, где $x_k(t, x_0)$, $x_0(t, x_0) = x_0$ - являются периодическими по t периода 2π функциями, определенными соотношениями (10).

Доказательство. Покажем, что при любом k уравнение (8) однозначно разрешимо относительно $x_{k+1}(t, x_0)$. Введем оператор S , определяемый правой частью уравнения (8):

$$S(x(t), z(t)) = x_0 + \int_0^t P_m f \left(t, x(t), \int_0^T \varphi(t, s, x(s)) ds \right) dt + \\ + \int_0^t I - P_0 - P_m f \left(t, z(t), \int_0^T \varphi(t, s, z(s)) ds \right) dt. \quad (13)$$

На основании равенства (13) составим разность $S x(t), z(t) - S \bar{x}(t), z(t)$ и оценим её с учетом неравенства (5):

$$\|S x(t), z(t) - S \bar{x}(t), z(t)\|_0 = \\ \left\| \int_0^t P_m \left[f \left(t, x(t), \int_0^T \varphi(t, s, x(s)) ds \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - f \left(t, \bar{x}(t), \int_0^T \varphi(t, s, \bar{x}(s)) ds \right) \right] dt \right\|_0 \leq \\ \leq \pi K_1 + TK_2K_3 \|x(t) - \bar{x}(t)\|_0,$$

т.е.

$$\|S x(t), z(t) - S \bar{x}(t), z(t)\|_0 \leq \pi Q \|x(t) - \bar{x}(t)\|_0, \quad (14)$$

где $Q = K_1 + TK_2K_3$.

Из неравенства (14) в силу условия (9) следует, что $S(x, z)$ - оператор сжатия по X на множестве $\tilde{C}_D$, а поскольку $S\tilde{C}_D \subset \tilde{C}_D$, то в силу теоремы Банаха соотношение (10) однозначно разрешимо относительно $x_{k+1}(t, x_0)$ в $\tilde{C}_D$.

Кроме того, для функций последовательности (10) с учетом неравенств (4) и (5) получим оценку

$$|x_{k+1}(t, x_0) - x_0| \leq M \pi + 2\sqrt{2}\sigma(m). \quad (15)$$

Для доказательства сходимости последовательности $x_{k+1}(t, x_0)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ на основании (10) составим разность $x_2(t, x_0) - x_1(t, x_0)$ и оценим её используя неравенств (4), (5), (7) и (8). Тогда получим следующее неравенство:

$$\|x_2(t, x_0) - x_1(t, x_0)\| \leq \left\| \int_0^t P_m \left[f \left(t, x_2(t, x_0), \int_0^T \varphi(t, s, x_2(s, x_0)) ds \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - f \left(t, x_1(t, x_0), \int_0^T \varphi(t, s, x_1(s, x_0)) ds \right) \right] dt \right\| + \\ + \left\| \int_0^t I - P_0 - P_m \left[f \left(t, x_1(t, x_0), \int_0^T \varphi(t, s, x_1(s, x_0)) ds \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - f \left(t, x_0, \int_0^T \varphi(t, s, x_0) ds \right) \right] dt \right\| \leq \\ \leq \pi Q \|x_2(t, x_0) - x_1(t, x_0)\|_0 + 2\sqrt{2}\sigma(m)Q \|x_1(t, x_0) - x_0\|_0. \quad (16)$$

Решая неравенство (16), получим оценку

$$|x_2(t, x_0) - x_1(t, x_0)|_0 \leq \frac{2\sqrt{2}\sigma(m)Q}{1 - \pi Q} |x_1(t, x_0) - x_0| = \\ = q_m |x_1(t, x_0) - x_0|_0 \quad (17)$$

По индукции можно заключить, что справедливо следующая оценка

$$|x_{k+1}(t, x_0) - x_k(t, x_0)|_0 \leq q_m^k |x_1(t, x_0) - x_0|_0, \quad (18)$$

и, следовательно, оценка

$$|x_{k+p}(t, x_0) - x_k(t, x_0)|_0 \leq q_m^k \sum_{i=0}^{p-1} q_m^i |x_1(t, x_0) - x_0|_0. \quad (19)$$

Из неравенства (19) в силу выполнения условия (9) следует равномерная относительно $(t, x_0) \in (-\infty, \infty), D - a(m)$ сходимости последовательности функций $x_k(t, x_0)$ к некоторой периодической функции $x^*(t, x_0) \in \tilde{C}_D$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t, x_0) = x^*(t, x_0),$$

причем имеет место неравенство

$$|x^*(t, x_0) - x_k(t, x_0)|_0 \leq \frac{q_m^k}{1 - q_m} |x_1(t, x_0) - x_0|_0. \quad (20)$$

Переходя в соотношении (10) к пределу при $k \rightarrow \infty$, убеждаемся, что предельная функция $x^*(t, x_0)$ является решением интегрального уравнения

$$x^*(t, x_0) = x_0 + \int_0^t f \left(t, x^*(t, x_0), \int_0^T \varphi(t, s, x^*(s, x_0)) ds \right) dt - P_0 f \left(t, x^*(t, x_0), \int_0^T \varphi(t, s, x^*(s, x_0)) ds \right) dt. \quad (21)$$

Поскольку $\psi(t)$ является периодическим решением уравнения (1), она удовлетворяет уравнению

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f \left(t, x(t), \int_0^T \varphi(t, s, x(s)) ds \right) dt$$

и обладает свойством

$$P_0 f \left(t, \psi(t), \int_0^T \varphi(t, s, \psi(s)) ds \right) = 0,$$

то отсюда следует, что $\psi(t)$ как и $x^*(t, x_0)$ есть периодическое решение уравнения (21). В силу того, что уравнение (21) имеет единственное решение, то $\psi(t) = x^*(t, x_0)$, и, следовательно, справедливо соотношение $\psi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t, x_0)$.

Теорема доказана.

Заключение. В заключение отметим, что применение проекционно-итеративного метода к исследованию периодических систем интегро-дифференциальных уравнений позволяет за счет выбора m ускорить сходимость процесса приближений к периодическому решению.

Литература

1. Гречко В.И. Об одном проекционно-итеративном методе определения периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений. // Укр. мат. журн., 1974, Т.26, №4. – С. 534-539.
2. Лучко А.Ю. Проекционно-итеративные методы. – Киев: «Наук. думка», 1993.
3. Нуржанов О.Д. О применении одного проективно-итеративного метода к отысканию периодических решений интегро-дифференциальных уравнений с запаздыванием. // Вестник КГУ имени Бердаха. – Нукус: 2016, №3(32). – С. 3-6.
4. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования периодических решений. – Киев: «Вища школа», 1976.
5. Урабе М. Метод Галеркина для нелинейных периодических систем. // Механика, 1966, 97, №3. – С. 3-34.