

KONUSLIQ KÓPOBRAZLIQTÍN KÓLEMIN KOMPYUTER BAĞDARLAMALARÍNDÁ ESAPLAW USÍLLARÍ HAQQÍNDÁ

A.B.Qutbaev – *fizika-matematika ilimleri boyınsha filosofiya doktori*
Ajiniyaz atındaǵı Nókis mámleketlik pedagogikalıq instituti

О МЕТОДАХ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОБЪЁМА КОНИЧЕСКОГО МНОГОГРАННИКА В КОМПЬЮТЕРНЫХ ПРОГРАММАХ

А.Б.Кутбаев – *доктор философии физико-математических наук*
Нукусский государственный педагогический институт имени Ажинияза

ABOUT THE METHODS OF CALCULATING THE VOLUME OF A CONIC MULTIFACET IN COMPUTER PROGRAMS

A.B.Kutbayev – *Doctor of Philosophy in Physics and Mathematics*
Nukus State Pedagogical Institute named after Ajiniyaz

Tayanch so‘zlar: giperbolik geometriya, konussimon ko‘pxillik, orbifold, giperbolik hajm, invariant.

Rezyume. Mazkur maqolada konussimon ko‘pxillikning hajmini hisoblashning usullari bayon etilgan bo‘lib, bunda SnapPy va Wolfram Mathematica 13.2 kompyuter dasturlarida hisoblash farqlari keltirilgan.

Ключевые слова: гиперболическая геометрия, коническое многообразие, орбиформ, гиперболический объем, инвариант.

Резюме. В работе представлены методы вычисления объемов конических многообразий для узлов в гиперболической геометрии, также различия между вычислениями в компьютерных программах SnapPy и Wolfram Mathematica 13.2.

Key words: hyperbolic geometry, cone-manifold, orbifold, hyperbolic volume, invariant.

Summary. In this work, methods for computing volumes of cone manifolds for knots in hyperbolic geometry are presented, along with differences between computations performed in the computer programs SnapPy and Wolfram Mathematica 13.2.

Kirisiw. 1975-jılı Robert Rayli úsh ólshemli sferadaǵı ayırım túyinler hám shınjurlardıń tolıqtırıwshısında giperbolalıq strukturaǵa mısallar taptı. Olardıń “ájayıp túyinler” dep atalatuǵın jetewi [6] da qarastırılǵan. Jáne bir júdá áhmiyetli bolǵan “segiz figurası” túyini onıń óz aldına [7,8] monografiyalarında úyrenilgen. Keyinirek, 1977-jıldıń báhárinde W. Tyorston úsh ólshemli kópobrazlıqlarda turaqlı teris iymeklikli Riman metrikasınıń bar bolıwı haqqındaǵı teoremasın járiyaladı. Dara jaǵdayda, torlıq hám satellitlik túyinlerden basqa qálegen ápiwayı túyinniń tolıqtırıwshısı tolıq giperbolalıq strukturaǵa iye ekeni belgili boldı. Bul fakt bizge túyinler teoriyasın geometriya hám diskret gruppalar teoriyasınıń bir bólegi sıpatında qaraw múmkinshiligin berdi. Payda bolǵan jańa baǵdar zamanagóy matematikada *geometriyalıq túyinler teoriyası* dep te ayıladı. Geometriyalıq túyinler teoriyasında áhmiyetli geometriyalıq invariantlardıń biri bolǵan konuslıq kópobrazlıqtıń kólemin esaplaw máselesi júdá aktuallıq mashqalalardıń qatarında turadı. Ásirese bunday kópobrazlıqlardıń giperbolalıq geometriyadaǵı kólemlerin esaplaw boyınsha bir qatar iri ilimiy nátiyjeler alınǵan. Mısalı, bul tarawda ataqlı alım William Tyorstonnıń shákirti Jeffri Wiks 2001-jılı 3 ólshemli kópobrazlıqlarǵa arnalǵan SnapPea [1] programmasın járiyaladı. Keyin ala Mark Kuller, Natan Danfild hám basqalar bul programmanı jetilistirip SnapPy [2] programmasına tiykar saldı. Bul kompyuter programmasında 3 ólshemli giperbolalıq

orbifoldlardıń kólemlerin sanlı esaplawǵa boladı. Biraq, biz matematikler ushın kólemdi esaplaw ushın anıq analitikalıq formulalar tabıw máselesi kúta áhmiyetli. Bul formulalardan paydalanıp, mısalı Wolfram Mathematica programmasında sanlı juwıq mánislerdi alıwımızǵa boladı.

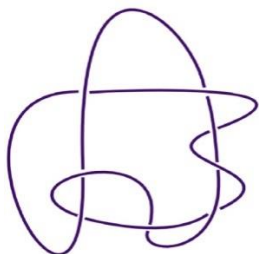
Ádebiyatlar analizi jáne metodologiya. Bul jumısta bizler avtor jáne onıń ilimiy basshısı ataqlı rus alımı professor Aleksandr Mednix tárepinen alınǵan nátiyjeni [3] Wolfram Mathematica 13.2 kompyuter programmasında realizaciyalaw hám SnapPy programmasındaǵı sanlı nátiyjeler menen salıstırıw máselesin qaraymız. Bunday salıstırıwlar nátiyjelerdi tastıyıqlawda xalıqaralıq matematikler tárepinen keńnen qollanıladı.

Turaqlı k sekciyalı iymeklikli keńisliktegi kesilispeytuǵın úsh ólshemli simpleksleriniń jıynaǵınan, olardıń qırların izometriyalı biriktiriw jolı menen alınǵan metrikalıq keńislikke *konuslıq kópobrazlıq* dep aytamız. Sonday-aq, bunday biriktiriwdıń nátiyjesinde payda bolǵan topologiyalıq keńislik (tasıwshı keńislik) kópobrazlıq boladı dep uýǵarıladı.

Bunday kópobrazlıq 2 hám 3 ólshemli kletkalardıń birikpesinde k ǵa teń bolǵan turaqlı sekciyalıq iymeklikli Riman metrikasına iye boladı. $k = -1$ bolsa, biz sáykes kópobrazlıqtı giperbolalıq strukturaǵa iye (yamasa jol qoyadı) dep aytamız. Evklid ($k = 0$) hám sferalıq ($k = 1$) strukturalarǵa iye bolǵan konuslıq kópobrazlıqlar da tap usılay anıqlanıadı.

Meyli K úsh ólshemli S^3 sferadağı qanday da bir túyin bolsın. Sáykes konuslıq kópobrazlıqtı $K(\alpha)$ arqalı belgileymiz, bul jerde α – túyinge tuwra keliwshi konuslıq múyesh. Eger $\alpha = \frac{\pi}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ bolsa, onda $K(\alpha)$ kópobrazlıq *orbifold* dep aytıladı. SnapPy programmasında giperbolalıq keńislikte modellestiriletuǵın qálegen orbifoldtıń maydanın esaplawǵa boladı. Biraq bizge qálegen α konuslıq múyesh ushın kólemdi esaplaw múmkinshiligin beriwshi analitikalıq formula tabıw zárúrli. Bul formula arqalı Wolfram Mathematica programmasında esaplaw júrgiziwege boladı.

Talqılaw. Anıqlıq ushın Rolfseinniń túyinler kestesinde [4] 8_1 tańbası arqalı belgilenetuǵın eki kópirlı túyindi qaraymız [1-súwret]. Bul belgilewdiń sebebi, túyin 8 kesilispege iye jáne 8 kesilispeli túyinler diziminde 1-orında turadı. Ol $\frac{13}{6}$ qıyalıqlı racionallıq túyin yamasa eki kópirlı túyin boladı.



1-súwret. 8_1 túyini.

Endi túyindi úsh ólshemli Evklid keńisliginde qaraymız. Túyinniń jetkilikli kishi dógeregin qaralıp atırǵan keńislikten shıǵarıp taslasaq, onda biz úsh ólshemli kópobrazlıqqa iye bolamız. Túyinge sáykes keliwshi ayırıqshalıqtı konuslıq singulyarlıqqa almastırıp, konuslıq kópobrazlıqtı payda etemiz. Payda bolǵan konuslıq kópobrazlıqtı $8_1(\alpha)$ arqalı belgileymiz [3]. Maqalada bul kópobrazlıqtıń α nıń qanday mánislerinde giperbolalıq bolıwı hám de sáykes kólemi esaplaw ushın analitikalıq formula alındı. Tastıyıqlawdıń keltiremiz.

Teorema. Meyli $8_1(\alpha)$ kópobrazlıq giperbolalıq bolsın, yaǵnıy $0 < \alpha < \alpha_0 \approx 2.75$. Onda onıń maydanın tómendegi formula arqalı esaplawǵa boladı:

$$V(8_1(\alpha)) = 2 \int_{A_0}^A f(\xi) d\xi,$$

bul jerde $A_0 = ctg\alpha_0$, $A = ctg\alpha$ hám

$$f(\xi) = \begin{cases} \frac{\ln \left| \frac{\xi - i z_2}{\xi + i z_2} \right|}{1 + \xi^2}, & \text{eger } 1.3946 \leq \xi \leq 2.38, \\ \frac{\ln \left| \frac{\xi - i z_4}{\xi + i z_4} \right|}{1 + \xi^2}, & \text{eger } 0.597 \leq \xi \leq 1.3946 \\ & \text{yaki } 2.38 \leq \xi \leq 2.435, \\ \frac{\ln \left| \frac{\xi - i z_6}{\xi + i z_6} \right|}{1 + \xi^2}, & \text{keri jaǵdayda.} \end{cases}$$

Teoremanıń dálilleniwi J. Portidiń eki kópirlı túyinlerdiń turaqlı iymeklikli úsh ólshemli keńisliklerde modellestiriliwi haqqındaǵı teoreması [5] menen A-polinom dep atalatuǵın túyinlerdiń topologiyalıq invariantınıń qollanıwına tiykarlanǵan.

Nátiyjeler. Endi bul kópobrazlıqtıń kólemi esaplawdıń ámeliyatta qalay alıp barılatuǵının kóreyik. Ádep SnapPy programmasınan paydalanıp bir neshe orbifoldtıń maydanın esaplaymız (2-súwret):

```

SnapPy Command Shell
SnapPy File Edit Window Help

Hi. It's SnapPy.
SnapPy is based on the SnapPea kernel, written by Jeff Weeks.
Type "Manifold?" to get started.
**Please upgrade to 3.1 from 3.0.3 via http://snappy.computop.org**

In[1]: M=Manifold("8_1(3,0)")
In[2]: M.volume()
Out[2]: 1.1343304171

In[3]: M=Manifold("8_1(4,0)")
In[4]: M.volume()
Out[4]: 2.11140103990

In[5]: M=Manifold("8_1(5,0)")
In[6]: M.volume()
Out[6]: 2.57280119856

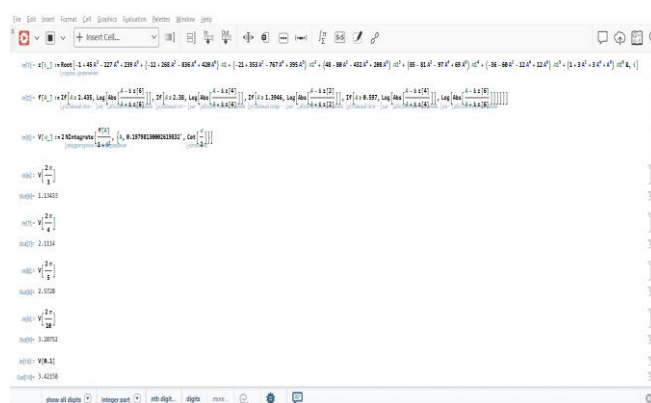
In[7]: M=Manifold("8_1(10,0)")
In[8]: M.volume()
Out[8]: 3.20751918250

```

2-súwret. $8_1(\alpha)$ orbifoldtıń maydanı.

Súwrette kórinip turǵanıday SnapPy programmasında tek $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ kórinistegi múyeshler ushın ǵana esaplaw imkaniyatı bar, yaǵnıy qálegen múyeshi bul kóriniste ańlatıwdıń iláji joq.

Al, endi Wolfram Mathematica 13.2 programmasında esaplaw barısı menen tanısamız (3-súwret). Bul programmada tikkeley teorema keltirilgen formuladan paydalanıp esaplaw júrgiziwe boladı, biraq dáslep ózgeriwshi parametrlerdı kirgizip alıw hám sáykes funkciyalardıń beriliwlerin jazıw kerek.



3-súwret. Wolfram Mathematica 13.2 programmasında kópobrazlıqtıń maydanın esaplaw

Súwretlerdi salıstırıp kórsek, eki programmada da nátiyjeler ústpe-úst túsip tur. Bul bolsa nátiyjelerdiń durılıǵın tastıyıqlaydı. Al, teoremaǵı formula qálegen konuslıq múyesh α ushın orınlı ekenin kórsetedi.

Juwmaq. Solay etip biz giperbolalıq keńisliktegi qanday da bir obyektin, yaǵnıy $8_1(\alpha)$ konuslıq kópobrazlıqtın kólemin esaplaw máselesi menen tanıstıq. Bul másele ni konuslıq múyeshtin basqa mánislerinde de usıǵan uqsas usıl menen sheshiwge boladı. Anıqlastırıp aytqanda, sáykes konuslıq kópobrazlıqtı sferalıq yamasa Evklid keńisliginde qarastırw múmkin. Biraq, bunda bir qızıq tárepi son da, Evklid keńisliginde kólem di esaplaw máselesi

biz oylaǵanı mızday ańsat júrgizilmeydi. Bul másele boyınsha ele anıq nátiyje alınbaǵan bolıp, tiyisli esaplaw jumislari alıp barılmaqta. Ulıwmalastırıp aytqanda, kólem, maydan hám basqa da ólshemlerdi anıqlaw barlıq waqıtta geometriyada, ulıwma, matematikada aktuallıq máselelerdin qatarında jatadı. Al, topologiyada bolsa bul xarakteristikalar áhmiyetli invariantlardan bolıp esaplanadı. Bul baǵdarda elege deyin jıldan-jılǵa jańa nátiyjeler alınıp kelinbekte.

Ádebiyatlar

1. Weeks J., SnapPea: A computer program for creating and studying hyperbolic 3-manifolds, 2001.
2. Culler M., Dunfield N., Goerner M., Jeffrey W. SnapPy, a computer program for studying the geometry and topology of 3-manifolds, Available at <http://snappy.computop.org>
3. Mednykh A.D., Qutbaev A.B. Hyperbolic Volumes of Two Bridge Cone-Manifolds. // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, 2025, vol. 51. – P. 21-33.
4. Rolfsen D. Knots and Links, AMS, 2003.
5. Porti J. Spherical cone structures on 2-bridge knots and links. // Kobe J. Math., 2004, vol. 21, no. 1-2. – P. 61-70.
6. Riley R. Seven excellent knots. Low-dimensional Topology, 1982, vol. 48. – P. 81-151.
7. Brin M., Jones G., Singerman D. Commentary on Robert Riley's article "A personal account of the discovery of hyperbolic structures on some knot complements". Exp. Math., 2013, vol. 31, no. 2. – P. 99-103.
8. Riley R. A personal account of the discovery of hyperbolic structure on some knot complements. Exp. Math., 2013, vol. 31, no. 2. – P. 104-115.