

SALÍSTIRMALARDÍŇ BAZÍ BIR QOLLANÍWLARÍ

M.Asqarov – fizika-matematika ilimleriniń kandidati, docent
Ajiniyaz atındaǵı Nókis mámleketlik pedagogikalıq instituti

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ СРАВНЕНИЙ

М.Асқаров – кандидат физико-математических наук, доцент
Нукусский государственный педагогический институт имени Ажинияза

SOME APPLICATIONS OF COMPARISONS

M.Asqarov – candidate of Physical and Mathematical sciences, associate professor
Nukus State Pedagogical Institute named after Ajiniyaz

Tayanch so‘zlar: sonlarning bo‘linish alomati, taqqoslama, yechimlarni soddalashtirish.

Rezyume. Bu maqolada taqqoslamalarning bazi bir tadbirlari qaralgan. Bazi bir sonlarning bo‘linish alomatları isbotlangan va misollar keltirilgan.

Ключевые слова: признак делимости чисел, сравнение, упрощение решений.

Резюме. В статье рассматриваются некоторые применения сравнений. Доказаны признаки делимости некоторых чисел и приведены примеры.

Key words: divisibility test of numbers, comparison, simplification of solutions.

Summary. This article examines some applications of comparisons. The divisibility of some numbers is proven and examples are given.

Kirisiw. Ulıwma orta bilim beriw mekteplerinde sanlardıń bóliniw belgisine baylanıslı ápiwayı túsinikler berilgen. Al, ayırım orta arnawlı oqıw orınları matematika kursında sanlardıń bóliniw belgisi hám salıstırmalardı baylanıslı túsinikler kiritilgen bolıp, biraq olarda tiykarınan ápiwayı misallardı itibar qaratılǵan. Bul materiallar joqarı oqıw orınlarında tereńlestiriledi. Oqıwshı hám studentlerde máselelerdiń sheshiliw procesin ańsatlastırwshı teoriyalıq materiallardan paydalanıp bilw eń áhmiyetli kónlikpelerdiń biri bolıp esaplanadı. Bul maqalada salıstırma túsiniginen paydalanıp bazı bir máselelerdiń sheshiliwin kórip shıǵamız [1-3].

Dáslep salıstırma haqqında qısqasha túsinik berip ótemiz.

Qaldıqlı bóliw haqqındaǵı teoremaǵa tiykarlanıp hár qanday eki $a, m > 0$ pútin san ushin tómendegi teńliklerdi jazıwǵa boladı:

$$a = mq_1 + r, \quad (1)$$

$$b = mq_2 + r, \quad (2)$$

bunda $0 \leq r < m$. (1) hám (2) teńlikler a hám b sanların m ge bólgende birdey qaldıq qalıwın bildiredi.

Аңқлама. Eger eki pútin a hám b sandı m natural sanǵa bólgende payda bolǵan qaldıqlar óz ara teń bolsa, onda a hám b sanlar m modul boyınsha teń qaldıqlı sanlar yamasa m modul boyınsha salıstırılwshı sanlar delinedi.

Eger a hám b sanlar m modul boyınsha salıstırılwshı bolsa, onda tómendegishe belgilenedi:

$$a \equiv b \pmod{m}. \quad (3)$$

Eger (1) den (2) ni ayırsaq, onda $a - b = m(q_1 - q_2)$ yamasa

$$a - b = mt, \quad (t = q_1 - q_2) \quad (4)$$

teńlik payda boladı.

Joqarıdaǵı pikirlerdi juwmaqlap tómendegi juwmaqlardı shıǵarıw múmkin:

1. m modul boyınsha salıstırılwshı sanlardıń ayırması m sanına bólinedi.

2. Eger $a = b + mt$ bolıp, b nı m ge bólgendegi qaldıq r ǵa teń bolsa, a nı da m ge bólgendegi qaldıq r ǵa teń boladı.

3. Eger $a = mq + r$ bolsa, ol jaǵdayda onı $a \equiv r \pmod{m}$ sıyaqlı da jazıw múmkin.

4. Eger $\frac{a}{m}$ bolsa, ol jaǵdayda $a \equiv 0 \pmod{m}$ boladı.

Teorema. Endi tómendegi salıstırmalar sistemasın qaraymız:

$$\begin{cases} x \equiv b_1 \pmod{m_1}, \\ x \equiv b_2 \pmod{m_2}, \\ \dots\dots\dots, \\ x \equiv b_k \pmod{m_k}, \end{cases} \quad (5)$$

bul jerde $m_1, m_2, \dots, m_n$ sanlar jupları menen óz ara arıwayı sanlar.

Bul sistema bir belgisiz sızıqlı salıstırmalar sisteması delinedi.

Eger (5) sistemada $m_1, m_2, \dots, m_n$ moduller juw-jubı menen óz ara ápiwayı bolsa, $i \neq j$ da $(m_i, m_j) = 1$ bolsa, onda onıń sheshimin tómendegi formula menen tabıw múmkin:

$$x_0 = \frac{M}{m_1} y_1 \alpha_1 + \frac{M}{m_2} y_2 \alpha_2 + \dots + \frac{M}{m_n} y_n \alpha_n, \quad (6)$$

bul jerde $M = [m_1, m_2, \dots, m_n]$ hám $y_1, y_2, \dots, y_n$ lar

$\frac{M}{m_i} y_i = 1 \pmod{m_i}, \quad i = \overline{1, n}$ salıstırmaların sheshimlerini ibarat. Sistemanın sheshimi $x \equiv x_0 \pmod{M}$ salıstırmadan ibarat boladı.

Tiykargı bólim. Maqaladağı tiykargı maqsetimiz ulıwma orta, orta arnawlı oqıw orınlarındağı olimpiyadaǵa qızıǵıwshı ziyrek oqıwshılardı sanlar teoriyası bóliminen bazı bir quramalı máselelerdi ápiwayı hám qolaylı usıllar menen sheshiwdi úyretiw bolıp esaplanadı. Sonlıqtan mısallargá ótemiz.

1-mısal. $2^{5n} - 1$ dın 31 ge bóliniwin dálilleń ($n \in \mathbb{N}$).

Dálillew: $2^5 - 1 = 31$ bolǵanlıǵı ushın $2^5 \equiv 1 \pmod{31}$. Bul salıstırıwdın eki tárepın n dárejege kóterip, $2^{5n} \equiv 1 \pmod{31}$ di payda etemiz, bul bolsa $(2^5 - 1)/31$ di ańlatadı.

2-mısal. Eger n - taq san bolsa, ol halda $n^2 - 1$ ni 8 ge bóliniwin dálilleń.

Dálillew: n taq san bolsa, ol halda onı $n = 2k + 1$, $k = 1, 2, 3, \dots$ kóriniste jazamız. Endi salıstırıwdın anıqlamasınan paydalanıp tómendegishe jazamız, yaǵnıy $n^2 - 1 \equiv 0 \pmod{8}$. Endi n nın ornına $n = 2k + 1$ dı qoyıp, tómendegi salıstırıwǵa kelemiz, yaǵnıy

$$\begin{aligned} (2k+1)^2 - 1 &\equiv 0 \pmod{8}, \\ 4k^2 + 4k + 1 - 1 &\equiv 0 \pmod{8}, \\ 4k^2 + 4k &\equiv 0 \pmod{8}, \\ 4k(k+1) &\equiv 0 \pmod{8}. \end{aligned}$$

$k+1$ jup ekenliginen $4k(k+1)$ sanı 8 ge bóliniwi kelip shıǵadı:

3-Mısal. 2^{100} sanının jazılıwındaǵı aqırǵı eki sanın tabırın.

Sheshiliwi: Berilgen sannın aqırǵı eki sanı bul sandı 100 ge bólgende payda bolatuǵın qaldıqtan ibarat. Demek, tómendegi salıstırıwdı qanaatlandıratuǵın X sanın tabır talap etiledi:

$$2^{100} \equiv x \pmod{100}.$$

Ekiniń kishi dárejelerinen baslap, 100 ge bólgende payda bolatuǵın qaldıqlardı izbe-iz ajratamız:

$$2^{100} = (2^{10})^{10} = 1024^{10};$$

$$(1024)^{10} \equiv (24)^{10} \pmod{100}.$$

$$\begin{aligned} (24)^{10} &= (576)^5 \equiv 76^5 \equiv (76)^4 \cdot 76 = (5776)^2 \cdot 76 \equiv (76)^2 \cdot 76 = \\ &= 5776 \cdot 76 = 76^2 = 5776 \equiv 76 \pmod{100}. \end{aligned}$$

Solay etip, 2^{100} sanının aqırǵı eki sanı 7 hám 6 dan ibarat eken.

Juwapı: 76.

4-mısal. $7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n : 19$ barlıq natural n sanlarda bólinetuǵının dálileń.

Dálillew: Salıstırmaların qásiyetlerinen paydalanamız:

$$25 \equiv 6 \pmod{19}$$

bolǵanlıqtan, berilgen ańlatpanı tómendegishe jazıwǵa boladı

$$\begin{aligned} 7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n &= 7 \cdot 25^n + 12 \cdot 6^n \equiv 7 \cdot 6^n + 12 \cdot 6^n = \\ &= (7+12) \cdot 6^n = 19 \cdot 6^n \equiv 0 \pmod{19}. \end{aligned}$$

Aqırǵı ańlatpadan dálileniw kelip shıǵadı.

5-mısal. Bóliniwin dálilleń $10^{70} - 19^2 : 27$.

Dálillew: Bunda 10 sanın 27 sanı menen salıstırıwdın paydası joq, sonlıqtan tómendegishe túrlendiremiz:

$$10^{70} = 10^{2 \cdot 35} = (10^2)^{35} = 100^{35}.$$

Salıstırmaların qásiyetlerinen paydalanamız

$$100 \equiv 19 \equiv -8 \pmod{27}.$$

Bunı dawam ettirsek

$$10^{70} - 19^2 = 100^{35} - 19^2 \equiv (-8)^{25} - (-8)^2 = -8^2 \cdot (8^{23} + 1) \pmod{27}.$$

Solay etip tómendegige iye bolamız

$$10^{70} - 19^2 = -8^2 \cdot (8^{23} + 1) \equiv -64 \cdot (-1+1) = 0 \pmod{27} \Rightarrow 10^{70} - 19^2 : 27.$$

6-mısal. $(75 \cdot 56)^{25} + (58 \cdot 34)^{31}$ ańlatpanı 19 ǵa bóliwdegi qaldıqtı tabırın.

Sheshiliwi: Berilgen sanlardan salıstırmanın anıqlamasınan paydalanıp tómendegilerge iye bolamız:

$$75 \equiv -1 \pmod{19};$$

$$56 \equiv -1 \pmod{19};$$

$$58 \equiv 1 \pmod{19};$$

$$34 \equiv -4 \pmod{19}.$$

Keyin salıstırmaların qásiyetlerinen paydalanamız:

$$(75 \cdot 56)^{25} + (58 \cdot 34)^{31} \equiv 1^{25} + (-4)^{31} = 1 - 4^{31} \pmod{19}.$$

$$\begin{aligned} 4^{31} &= 4 \cdot (4^2)^{15} = 4 \cdot 16^{15} \equiv 4 \cdot (-3)^{15} = 4 \cdot 3^{15} = 4 \cdot 27^5 \equiv 4 \cdot 8^5 = \\ &= 4 \cdot 8 \cdot 64^2 \equiv 32 \cdot 7^2 = 32 \cdot 49 \equiv 6 \cdot 11 = 66 \equiv 9 \pmod{19}. \end{aligned}$$

Nátıyjede tómendegi salıstırma kelip shıǵadı

$$(75 \cdot 56)^{25} + (58 \cdot 34)^{31} \equiv 1 - 4^{31} \equiv 1 - 9 = -8 \equiv 11 \pmod{19}.$$

Juwapı: 11.

7-mısal. Eger $f(x) = 15x^3 - 33x^2 + 7$ bolsa, onda $f(86)$ nı 11 ge bólgende qaldıqtı tabırın.

Sheshiliwi: Máseleni sheshiw ushın kópaǵzalıdaǵı hám basqa da sanlardı 11 ge bólgende absolyut shaması boyınsha eń kishi bolǵan qaldıqlar menen almatıramız:

$$86 \equiv -2 \pmod{11}, \quad 15 \equiv 4 \pmod{11}, \quad 33 \equiv 0 \pmod{11},$$

$$7 \equiv -4 \pmod{11}.$$

Bul jaǵdayda $f(86) \equiv f(-2) \pmod{11}$ boladı hám bizler salıstırmalar shınjırına iye bolamız:

$$f(-2) \equiv 4(-2)^3 - 0 \cdot (-2)^2 - 4 = -32 - 4 = -36 \equiv -3 \equiv 8 \pmod{11}.$$

Juwapı: 8.

8-mısal. Tómenđegi teńlemenı pútin sanlarda sheshimlerin tabıń:

$$39x - 22y = 10.$$

Sheshiliwi: Teńlemeden tómenđegi salıstırma kelip shıǵadı:

$$39x \equiv 10 \pmod{22}.$$

Bul salıstırmadaǵı koefficientleri 22 modul boyınsha eń kishi oń shegaralarına keltirsek, $17x \equiv 10 \pmod{22}$ payda etemiz, bul jerden $x_1 = 20$ dı payda etemiz. Bul mánis berilgen teńlemege qoyıp, $y_1 = 35$ ti tabamız. Demek, berilgen teńlemelerdiń ulıwma sheshimi tómenđegishe boladı:

$$\begin{cases} x = 20 + 22t, \\ y = 35 + 39t. \end{cases}$$

9-mısal. 2, 3, 4, 5, 6 hám 7 sanlarına bólingende sáykes túrde 1, 2, 3, 4, 5 hám 0 qaldıq payda bolatuǵın sandı tabıń.

Sheshiliwi: Másele tómenđegi salıstırmalar sistemasına keltiriledi:

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2}, \\ x \equiv 2 \pmod{3}, \\ x \equiv 3 \pmod{4}, \\ x \equiv 4 \pmod{5}, \\ x \equiv 5 \pmod{6}, \\ x \equiv 0 \pmod{7}. \end{cases}$$

$x \equiv 1 \pmod{2}$ yamasa $x \equiv 3 \pmod{2}$ salıstırma $x \equiv 3 \pmod{4}$ salıstırmanıń nátiyjesi sıpatında taslap jiberiliwi múmkin. Tap sonday $x \equiv 2 \pmod{3}$ salıstırma da alınbaydı.

Solay etip, tómenđegi sistemanı payda etemiz:

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{4}, \\ x \equiv 4 \pmod{5}, \\ x \equiv 5 \pmod{6}, \\ x \equiv 0 \pmod{7}. \end{cases}$$

Bul sistemanı sheship, $x \equiv 119 \pmod{420}$ nı payda etemiz.

10-mısal. 9 ǵa bóliniw qásiyetin dálilleń: Tek cifrlarınıń qosındısı 9 ǵa bólingende ǵana berilgen san 9 ǵa bólinedi.

Dálillew: Qálegen sandı tómenđegishe jazıwǵa boladı:

$$x = x_n x_{n-1} \dots x_2 x_1 = x_1 + x_2 10^1 + x_3 10^2 + \dots + x_n 10^{n-1},$$

bunda $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ler x sanınıń onlıq sistemada jazılıwı. $10 \equiv 1 \pmod{9}$ bolǵanlıqtan $10^2 \equiv 1 \pmod{9}$ boladı hám qálegen natural k ushın $10^k \equiv 1 \pmod{9}$ orınlı boladı. Bunnan salıstırma qásiyetlerinen paydalansaq

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 10 + x_3 10^2 + \dots + x_n 10^{n-1} &\equiv \\ &\equiv x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \equiv \pmod{9}. \end{aligned}$$

dálillendi.

11-mısal. 19 ǵa bóliniw qásiyetin dálilleń: Tek eki eselengen birlikler sanınıń onlıqlar sanına qosındısı 19 ǵa eseli bolǵanda ǵana berilgen san 19 ǵa bólinedi.

Dálillew: Qálegen X natural sanı ushın $x = x_1 + 10x_2$ teńligi orınlı boladı, bunda x_1 sannıń jazılıwındaǵı birlikler sanı, al x_2 bolsa onlıqlar sanı.

Meyli $y = x_2 + 2x_1$ bolsın, onda $10y - x = 19x_1 \equiv 0 \pmod{19}$ boladı, bunnan $x \equiv 0 \pmod{19}$ tek $10y \equiv 0 \pmod{19}$ bolǵanda ǵana, yaǵnıy $y \equiv 0 \pmod{19}$ bolǵanda orınlı boladı. Qásiyet dálillendi.

Juwmaq. Ulıwma orta hám orta arnawlı oqıw orınlarında ziyrek oqıwshılar arasında olimpiada sabaqların ótkende salıstırmalar túsiniǵı kiritilip tiyisli maǵlıwmatlar berilse, salıstırmalar járdeminde sanlar teoriyasına baylanıslı tastıyıqlawlardı dálillewde oqıwshılardıǵa qolaylıqlar alıp kelgen bolar edi.

Ádebiyatlar

1. Ayupov Sh.A., Omarov B.A., Xudoyberdiev A.X., Haydarov F.H. Algebra va sonlar nazariyasi (o'quv qo'llanma). – Toshkent: «Tafakkur bo'stoni», 2019.
2. Nazarov R.N., Toshpo'latov B.T., Dusumbetov A.D. Algebra va sonlar nazariyasi, II – qism. – Toshkent: «O'qituvchi», 1995.
3. Kurosh A.G. Oliy algebra kursi. – Toshkent: «O'qituvchi», 1976.