

МЕТОДИКА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПОДСТАНОВОК И ТЕОРЕМ

А.Хакимов – кандидат физико-математических наук, доцент

Д.Ашурова – доктор философии по педагогическим наукам, доцент

Д.Шокирова – преподаватель

Навоийский государственный университет

Таянч сўзлар: чегара, кетма-кетлик чегараси, чегараларни ҳисоблаш усуллари, леммалардан фойдаланиб чегараларни ҳисоблаш, Лопитал қоидаси.

Ключевые слова: предел, предел последовательности, методы вычисления пределов, вычисление пределов с использованием лемм, правило Лопиталя.

Key words: limit of a sequence, methods of calculating limits, limit calculation using lemmas, L'Hopital's rule.

Введение. В высших учебных заведениях фундаментальные науки математики строятся на основе программно-дидактических комплексов, личностно-ориентированного обучения, контекстуальных вопросов, проблемных вопросов, больших, средних и малых модульных технологий и методов обучения с использованием компьютерных математических программ в нашей стране и за рубежом.

Литературный обзор. Пределы являются фундаментальным понятием математического анализа и играют ключевую роль в изучении непрерывности, дифференцируемости и сходимости функций. Разработка эффективных методов вычисления пределов остаётся актуальной задачей, особенно в контексте образовательных и прикладных задач. В научной и учебной литературе особое внимание уделяется использованию элементарных подстановок и различных теорем, позволяющих существенно упростить вычисления.

Одним из распространённых приёмов является метод элементарных подстановок, суть которого состоит в замене переменных для упрощения исходного выражения. Этот подход широко представлен в учебниках по математическому анализу В.А.Зорича [1], теоремы о пределах, такие как теоремы о пределе суммы, произведения, частного и пределе сложной функции, лежат в основе аналитического подхода к вычислениям. Эти методы систематизированы в работах Т.Азларова [2] и А.С.Саъдуллаева [3].

В ряде работ А.Хакимова [4, 6], и Д.Н.Ашуровой [5, 9] внимание уделяется педагогическим аспектам формирования у студентов устойчивых навыков работы с пределами. Они подчеркивают эффективность использования поэтапного метода, при котором студент сначала определяет вид неопределённости, затем применяет подстановку или теорему, а затем – проверяет обоснованность перехода к пределу.

Обсуждение. В данной статье представлены теоретические и практические применения вычисления пределов некоторых классов последовательностей и функций с помощью простых подстановок.

Известно, что проведен ряд исследований по пределам последовательностей и функций, однако вычисление пределов с использованием лемм и теорем не вполне обосновано. Основная цель данной статьи посвящена применению лемм и теорем, облегчающих вычисление пределов первого и второго чудесных пределов. Статья посвящена проблемам повышения эффективности преподавания предмета «Вычисление последовательностей и пределов функций» в процессе подготовки будущих учителей математики и совершенствованию методики преподавания.

Постановка проблемы.

Лемма. Вокруг точки $x = x_0$ если выполнено

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$$

то подходит следующее соотношение

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{f(x)} - a^{\varphi(x)}}{x - x_0} = pq \quad (a > 0, a \neq 1).$$

Здесь

$$p = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{a^{f(x)-\varphi(x)} - 1}{f(x) - \varphi(x)} \right) = lna, \quad q = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \varphi(x)}{g(x)}.$$

Доказательство.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{f(x)} - a^{\varphi(x)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{\varphi(x)}(a^{f(x)-\varphi(x)} - 1)}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{\varphi(x)}(a^{f(x)-\varphi(x)} - 1)}{f(x) - \varphi(x)} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \varphi(x)}{x - x_0} = pq$$

$$p = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{\varphi(x)}(a^{f(x)-\varphi(x)} - 1)}{f(x) - \varphi(x)} = lna,$$

$$q = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \varphi(x)}{x - x_0}.$$

На основе приведенной выше леммы легко доказать следующие теоремы.

Теорема 1.

Для функции $f(x), \varphi(x), g(x)$ вокруг точки $x = x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad (a > 0, a \neq 1)$$

если условия соблюдены, то уместно следующее отношение

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{f(x)} - a^{\varphi(x)}}{g(x)} = pq. \quad (1)$$

Доказательство.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{f(x)} - a^{\varphi(x)}}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{\varphi(x)}(a^{f(x)-\varphi(x)} - 1)}{g(x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^{\varphi(x)} \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{a^{f(x)-\varphi(x)} - 1}{f(x) - \varphi(x)} \right) \cdot \left(\frac{f(x) - \varphi(x)}{g(x)} \right) = pq,$$

здесь

$$p = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{a^{f(x)-\varphi(x)} - 1}{f(x) - \varphi(x)} \right) = lna, \quad q = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \varphi(x)}{g(x)}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. $x = x_0$ вокруг

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \text{ и } g'(x_0) \neq 0$$

если соотношение выполнено, то имеет место равенство ($b > 0, b \neq 1, a > 0, a \neq 1$),

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{f(x)} - b^{\varphi(x)}}{g(x)} = plna - qlnb \quad [1]$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{f(x)-b\varphi(x)}}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{f(x)-1}}{g(x)} - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{b\varphi(x)-1}{g(x)} = \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{f(x)-1}}{f(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{b\varphi(x)-1}{g(x)} \cdot \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x)}{g(x)} &= p \ln a - q \ln b, \\ \text{здесь } p &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}; \quad q = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x)}{g(x)}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим вопросы, связанные с вышеизложенной темой:

$$\begin{aligned} 1^0. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{\sin x} (a^{x-\sin x} - 1)}{x} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{x-\sin x} - 1}{x - \sin x} \cdot \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x} &= \ln a \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) = \ln a \cdot (1 - 1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^0. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{\sin x} - a^{t \sin x}}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{t \sin x} (a^{\sin x - t \sin x} - 1)}{x^3} = \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{\sin x - t \sin x} - 1}{\sin x - t \sin x} \cdot \frac{\sin x - t \sin x}{x^3} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{\sin x - t \sin x} - 1}{\sin x - t \sin x} = \ln a. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - t \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos x - 1)}{x^3 \cos x} = \\ = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} &= -2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Так, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{\sin x} - a^{t \sin x}}{x^3} = -\frac{1}{2} \ln a.$$

$$\begin{aligned} 3^0. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a^{\ln x} - b^{\sin(x-1)}}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a^{\ln x} - 1}{x-1} - \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{b^{\sin(x-1)} - 1}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a^{\ln x} - 1}{\ln x} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} - \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{b^{\sin(x-1)} - 1}{\sin(x-1)} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} &= \ln a \cdot 1 - \ln b \cdot 1 = \ln \frac{a}{b} \end{aligned}$$

Докажем следующую теорему, облегчающую процесс решения практических задач и примеров.

Теорема 3. Если для функций $f(x)$, $\varphi(x)$ вокруг точек $x = a$ следующее выполняются следующие условия: $\varphi'(x) \neq 0$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = a$ В этом случае уместно следующее отношение

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{f(x)} - f(x)^a}{\varphi(x)} = a^a p \ln \frac{a}{e}, \quad (a > 0, a \neq 1) \quad (2)$$

Доказательство. В процессе доказательства теоремы проделаем следующую не мало сложную замену [2]:

$$\frac{a^{f(x)} - f(x)^a}{\varphi(x)} = \frac{(a^{f(x)-a-1} a^a)}{\varphi(x)} - a^a \left(\left(1 + \frac{f(a)-a}{a}\right)^a - 1 \right).$$

Чтобы вычислить предел, вычтите a^a из его изображения, затем добавьте и замените

$$\frac{a^{f(x)} - f(x)^a}{\varphi(x)} = \frac{(a^{f(x)-a-1} a^a)}{\varphi(x)} - \frac{a^a \left(\left(1 + \frac{f(x)-a}{a}\right)^a - 1 \right)}{\varphi(x)}$$

Начнем рассчитывать здесь лимит

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{f(x)} - f(x)^a}{\varphi(x)} = a^a \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{f(x)-a-1}}{f(x)-a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-a}{\varphi(x)} -$$

$$\begin{aligned} -a^{a-1} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(1 + \frac{f(x)-a}{a}\right)^a - 1}{(f(x)-a)a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-a}{\varphi(x)} \\ = a^a p \ln a - a^a p = a^a p (\ln a - \ln e) = a^a p \ln \frac{a}{e} \end{aligned}$$

Здесь

$$p = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-a}{\varphi(x)} \quad (3)$$

Для доказательства теоремы были использованы следующие соотношения, приведенные в

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(1+(f(x)-a))^\mu}{f(x)-a} = \mu, \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{f(x)-a-1}}{f(x)-a} = \ln a$$

Применим формулу (2) к практическому примеру. Если $\varphi'(x) \neq 0$ обязательно если сделано, то

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{e^{f(x)} - f(x)^e}{\varphi(x)} = 0$$

отсюда следует, что отношения соответствующие [3].

$$\begin{aligned} 1^0. \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{\sin(x-a)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^a (a^{x-a} - 1)}{\sin(x-a)} - \\ - \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^a \left(\left(1 + \frac{x-a}{a}\right)^a - 1 \right)}{\frac{x-a}{a}} &= a^a \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{x-a} - 1}{x-a}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{\sin(x-a)} - a^a \lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(1 + \frac{x-a}{a}\right)^a - 1}{\frac{x-a}{a}} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{a \sin(x-a)} = \\ a^a \ln a - \frac{a^a \cdot a}{a} = a^a (\ln a - 1) = a^a \ln \frac{a}{e}. \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{Из (4) } a = e \text{ следует, что } \lim_{x \rightarrow e} \frac{e^x - x^e}{\sin(x-e)} = \\ \lim_{x \rightarrow e} \frac{e^x - x^e}{\operatorname{tg}(x-e)} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{e^x - x^e}{\arcsin(x-e)} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{(e^x - x^e)}{\operatorname{arctg}(x-e)} = 0 \end{aligned}$$

$$2^0. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^{2 \sin \frac{\pi x}{4}} - (2 \sin \frac{\pi x}{4})^2}{x^2 - 4} = 2^2 p \ln \frac{2}{e} \quad (5)$$

Воспользуемся (3) для доказательства соотношения (5):

$$\begin{aligned} p = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 \sin \frac{\pi x}{4} - 2}{x^2 - 4} = 2 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin \frac{\pi x}{4} - 1}{x^2 - 4} = \\ = -4 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi}{8} (x-2) \right)}{x^2 - 4} &= -4 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi}{8} (x-2) \right)}{\left(\frac{\pi}{8} (x-2) \right)^2}. \end{aligned}$$

$$\frac{\left(\frac{\pi}{8} (x-2) \right)^2}{x-2} = -4 \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 \lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0.$$

Так,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^{2 \sin \frac{\pi x}{4}} - (2 \sin \frac{\pi x}{4})^2}{x^2 - 4} = 0.$$

$$3^0. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = a, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

затем рассчитайте следующий предел.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)^{\varphi(x)} - \varphi(x)^{f(x)}}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{f(x)} \log_a \varphi(x) - a^a}{g(x)} = \\ a^a \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{\varphi(x) \log_a f(x) - a - 1}}{g(x)} - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{f(x) \log_a \varphi(x) - a - 1}}{g(x)} \right) &= \\ a^a \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{\varphi(x) \log_a f(x) - a - 1}}{\varphi(x) \log_a f(x) - a} \cdot \frac{\varphi(x) \log_a f(x) - a}{g(x)} - \right. \\ \left. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{f(x) \log_a \varphi(x) - a - 1}}{f(x) \log_a \varphi(x) - a} \cdot \frac{f(x) \log_a \varphi(x) - a}{g(x)} \right) &= \end{aligned}$$

$$= a^a \ln a \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x) \log_a f(x) - a}{g(x)} - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \log_a \varphi(x) - a}{g(x)} \right)$$

$$4^0. \text{Вычислить. } \lim_{x \rightarrow a} \frac{(2x-a)^{\frac{x^2}{a}} - (\frac{x^2}{a})^{2x-a}}{x^2-a^2}. \quad (6)$$

(6) предел можно рассчитать двумя способами. В этом случае желаемый результат получается с помощью теоремы 3, а применение таких теорем к решению задач создает некоторое удобство для учащихся.

Метод 1: Вычисляем предел по правилу Лопиталя [4]

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{(2x-a)^{\frac{x^2}{a}} - (\frac{x^2}{a})^{2x-a}}{x^2-a^2} &= \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{\left((2x-a)^{\frac{x^2}{a}} \right)' - \left((\frac{x^2}{a})^{2x-a} \right)'}{(x^2-a^2)'} &= \\ = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{2x}{a} (2x-a)^{\frac{x^2}{a}} \left(\ln(2x-a) + \frac{x}{2x-a} \right) - 2 \left(\frac{x^2}{a} \right)^{2x-a} \left(\ln \frac{x^2}{a} + \frac{2x-a}{x} \right)}{2x} &= \\ = \frac{2a^a (\ln a + 1) - 2a^a (\ln a + 1)}{2a} &= 0. \end{aligned}$$

Метод 2: Используем теорему 3 для вычисления предела [5]. Используем формулу

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \varphi(x) - \varphi(x) f(x)}{g(x)} &= \\ = a^a \ln a \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x) \log_a f(x) - a}{g(x)} - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \log_a \varphi(x) - a}{g(x)} \right) &= \\ = a^a \ln a \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{x^2}{a} \log_a (2x-a) - (2x-a) \log_a \frac{x^2}{a}}{x^2-a^2} &= a^a \ln a \cdot \\ \cdot \left[\lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{x^2}{a} \log_a (2x-a) - a \log_a (2x-a)}{x^2-a^2} - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(2x-a) \log_a \frac{x^2}{a} - a \log_a \frac{x^2}{a}}{x^2-a^2} + \right. & \\ \left. + \lim_{x \rightarrow a} \frac{a \log_a (2x-a) - a \log_a \frac{x^2}{a}}{x^2-a^2} \right] &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{x^2}{a} \log_a (2x-a) - a \log_a (2x-a)}{x^2-a^2} &= \\ = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\frac{x^2}{a} - a) \log_a (2x-a)}{x^2-a^2} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\log_a (2x-a)}{a} = \frac{1}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \lim_{x \rightarrow a} \frac{(2x-a) \log_a \frac{x^2}{a} - a \log_a \frac{x^2}{a}}{x^2-a^2} &= \\ = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2(x-a) \log_a \frac{x^2}{a}}{x^2-a^2} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \log_a \frac{x^2}{a}}{x+a} = \frac{1}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{a (\log_a (2x-a) - \log_a \frac{x^2}{a})}{x^2-a^2} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{a \log_a \frac{(2x-a)a}{x^2}}{x^2-a^2} = \\ a \lim_{x \rightarrow a} \frac{\log_a \left(\frac{2a}{x} \cdot \frac{a^2}{x^2} - 1 + 1 \right)}{x^2-a^2} &= a \lim_{x \rightarrow a} \frac{\log_a \left(1 - \left(\frac{a}{x} - 1 \right)^2 \right)}{x^2-a^2} = \\ a \lim_{x \rightarrow a} \log_a \left(1 - \left(\frac{x-a}{x} \right)^2 \right)^{\frac{1}{x^2-a^2}} &= \\ = a \log_a \lim_{x \rightarrow a} \left[\left(1 - \frac{x-a}{x} \right)^{\frac{1}{x^2-a^2}} \cdot \left(1 + \frac{x-a}{x} \right)^{\frac{1}{x^2-a^2}} \right] &= \\ a \log_a \left(e^{-\frac{1}{2a^2}} \cdot e^{\frac{1}{2a^2}} \right) &= a \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Теорема 4. $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = \infty$ когда равенство имеет место $\lim_{x \rightarrow x_0} u^v = \exp\{\lim_{x \rightarrow x_0} (u-1)v\}$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} u^v &= \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \left((1 + (u-1))^{\frac{1}{u-1}} \right)^{(u-1)v} &= \exp\{\lim_{x \rightarrow x_0} (u-1)v\} \end{aligned}$$

Рассмотрим следующие практические примеры теоремы 4. [6]:

$$\begin{aligned} 1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a+x}{b+x} \right)^{kx} &= e^{k(a-b)}. \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^x &= \exp\left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{1+x}{2+x} - 1 \right) \right\} = \\ \exp\left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-x)}{2+x} \right\} &= e^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1+2x} \right)^{\frac{1}{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) &= 1 \text{ и } \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = \infty \\ \text{Когда} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} u^v &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left((1 + (u-1))^{\frac{1}{u-1}} \right)^{(u-1)v} = \\ = \exp\left\{ \lim_{x \rightarrow x_0} (u-1)v \right\} &= \\ \text{мы используем тот факт, что} & \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1+2x} \right)^{\frac{1}{x}} &= \exp\left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1+x}{1+2x} - 1}{x} \right\} = \\ \exp\left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-1)}{1+2x} \right\} &= e^{-1}. \end{aligned}$$

Заключение. Формирование динамики изучения математики студентами, анализ уровня приобретенных ими теоретических знаний, практических навыков и квалификации, а также изучение возможностей математики в формировании уровня мастерства, повышении эффективности учебного процесса, методологической основы квалификации, создается самостоятельное обучение студентов [7].

Эти знания используются для формирования навыков самостоятельного изучения раздела «Теория пределов» и анализа уровня освоенных теоретических, практических навыков и квалификации, повышения уровня мастерства, а также для изучения возможностей раздела «Теория пределов». Теория пределов» создает методическую основу для повышения эффективности практической подготовки.

Литература

1. Зорич В.А. Математический анализ. // Университетский учебник для студентов физико-математических специальностей. – Москва: МЦНМО. 2019. – С. 576.
2. Азларов Т., Мансуров Х. Математик анализ. Дарслик. – Тошкент: «Ўқитувчи», 1994.
3. Саъдуллаев А., Худойберганов Г. ва бошқ. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами. Ўқув кўлланма. – Тошкент: «Ўзбекистон», 2000.

4. Хакимов А., Турсунова Е.М., Кодирова Ш.Т. Об одном методе вычисления нестандартных, несобственных интегралов // Весник науки и образования. Научно-методический журнал. Изд. «Проблема наука». № 7 (110). Часть 3. Апрель 2021. – С. 16-22.

5. Ашурова Д.Н. Совершенствование преподавания в системе высшего образования на основе инновационных программно-дидактических комплексов (на примере науки «Алгебра и теория чисел»). Доктор философских наук (PhD) педагогических наук. – Ташкент: 2018. – С. 52.

6. Хакимов А., Д.Чулиева, З.Исмоилова. Умумлашган ажойиб лимитлар ҳақидаги теоремалар тадбири. “Педагогик маҳорат” илмий-методик журналі. – Бухоро: №3, 2013. 64-66-б.

7. Ashurova D.N., Qodirova Sh.T. Ba’zi bir funksiyalar sinfi limitlarini hisoblashning innovatsion usuli haqida. Ilm sarchashmalari ilmiy-metodik jurnali. –Urgench: №4, 2020. 11-14-b.

РЕЗЮМЕ. Мақолада айрим ноанъанавий кетма-кетликлар ва функциялар чегараларини ҳисоблашни соддалаштириш масалалари, шунингдек, чизиқли алмаштиришлар, Лемма ва теоремалардан фойдаланиш имкониятлари қўриб чиқилган.

РЕЗЮМЕ. В статье рассматриваются вопросы упрощения вычисления некоторых нестандартных последовательностей и пределов функций с помощью линейных подстановок, Лемм, теорем.

SUMMARY. The article discusses the simplification of calculating certain non-standard sequences and function limits using linear substitutions, Lemmas, and theorems.

ОБОСНОВАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ И ПОДСЧЕТНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПОДЗЕМНЫХ ВОД НА ОСНОВЕ ГЕОИНФОРМАЦИОННО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Р.П.Жумабаев – магистрант

Ташкентский информационно технологический университет

Таянч сўзлар: ер ости сувлари, чегара шароитлари, географик ахборот тизими, математик моделлаштириш, сувли қатлам, оқимни ҳисоблаш.

Ключевые слова: подземные воды, граничные условия, геоинформационная система, математическое моделирование, водоносный горизонт, расчёт потока.

Key words: groundwater, boundary conditions, geographic information system, mathematical modeling, aquifer, flow calculation.

Введение. За последние десятилетия основным стимулом для проведения гидрогеологических исследований была необходимость оценки водоносного потенциала аквиферов [3]. Однако за последние 20 лет акцент сместился с проблем водоснабжения на вопросы качества подземных вод [4]. Это обусловило потребность в прогнозировании перемещения загрязняющих веществ в подповерхностной среде [6]. Одним из следствий такого смещения приоритетов стало изменение научных подходов и методов сбора данных [2]. Ранее основное внимание уделялось разработке методов оценки и измерения водоотдающих свойств высокопроницаемых водоносных горизонтов [3]. В настоящее время основной акцент сделан на процессах переноса и дисперсии загрязняющих веществ, их задержке и разложении, а также на изучении влияния геологической неоднородности на пути фильтрации и время движения подземных вод [5, 8].

За последние два десятилетия наблюдаются также значительные технологические прорывы в области гидрогеологии подземных вод [1]. Одним из направлений технологического прогресса стало развитие и использование детерминированных компьютерных моделей с распределёнными параметрами для анализа фильтрации и переноса растворённых веществ в системах подземных вод [5, 7]. Эти достижения во многом стали возможны благодаря развитию вычислительной техники – появлению более мощных, быстрых и доступных компьютеров с большими объёмами памяти [4]. Другим важным направлением технологического прогресса стало применение изотопного анализа в гидрогеологии подземных вод [10].

Подземные воды играют важнейшую роль в обеспечении пресной водой населения, сельского хозяйства и

промышленности [2]. Правильное определение граничных условий и расчётных параметров является ключевым фактором для достоверного моделирования фильтрации и движения подземных вод [3, 5]. В последние годы интеграция геоинформационных систем (ГИС) и математических моделей зарекомендовала себя как эффективный подход для анализа подземных вод и прогноза их поведения [7, 9]. Цель данного исследования – разработать подход, который объединяет ГИС-данные и математические методы для обоснования реальных граничных условий и расчёта основных гидрогеологических параметров.

Обзор литературы. Слово «модель» имеет так много определений и так часто используется, что порой бывает трудно уловить его точный смысл (Konikow и Bredehoeft, 1992 в [5]). Модель, возможно, проще всего определить как представление реальной системы или процесса. Концептуальная модель – это гипотеза о том, как функционирует система или процесс. Эта гипотеза может быть выражена количественно в виде математической модели. Математические модели – это абстракции, которые представляют процессы в виде уравнений, физические свойства – в виде констант или коэффициентов в этих уравнениях, а состояния или потенциалы системы – в виде переменных.

Большинство моделей подземных вод, используемых сегодня, представляют собой детерминированные математические модели. Детерминированные модели основаны на законах сохранения массы, импульса и энергии и описывают причинно-следственные связи. Основное предположение заключается в том, что при высоком уровне понимания процессов, с помощью которых воздействия на систему вызывают её отклик, можно заранее предсказать реакцию системы на любое