

## EKINSHI TÁRTIPLI BETLIKTÍN ULÍWMA TEŇLEMESIN ÁPIWAYÍLASTÍRÍW USÍLLARI

**A.K.Seidullaev** – fizika-matematika ilimleri boyınsha filosofiya doktori

*V.I.Romanovskiy atındaǵı Matematika institutı Qaraqalpaqstan bólimi*

**K.X.Seydullaev** – úlken oqıtıwshı

**I.Q.Satniyazova** – student

**J.T.Amangeldieva** – student

*Berdaq atındaǵı Qaraqalpaq mámleketlik universiteti*

**Tayanch so‘zlar:** yuzaning umumiy tenglamasi, Lagranj usuli, ellipsoid, bir pallali giperboloid, ikki pallali giperboloid, elliptik paraboloid, giperbolik paraboloid.

**Ключевые слова:** общее уравнение поверхности второго порядка, метод Лагранжа, эллипсоида, однополостный гиперболюид, двуполостный гиперболюид, эллиптический параболоид, гиперболический параболоид.

**Key words:** general equation of the surface, Lagrange method, ellipsoid, hyperboloid of one sheet, hyperboloid of two sheets, elliptic paraboloid, hyperbolic paraboloid.

Ekinshi tártipli betliklerdiń ulıwma teńlemesin Evklid keńisliginde dekart koordinatalar sistemasında kanonikalıq kóriniske keltiriwdiń túrlishe usılları bar, máselen: koordinata sistemaların túrlendirip; invariantlardan paydalanıp; ulıwma teńlemenin kvadratlıq bólimindegi koefficientlerden dúzilgen matricanıń xarakteristikalıq kóp aǵzalısmın korenlerin tawıp kanonikalıq túrge keltiriw usılları bar [1-7].

Dáslepki eki usıl analitikalıq geometriya pánine jazılǵan sabaqlıqlardıń derlik hámмесinde bar [1, 2, 3]. Al, úshinshi usıl haqqında [4, 7] bilip alıwıńız múmkin.

Biz bul jumısımızda ekinshi tártipli betliklerdiń ulıwma teńlemesin kanonikalıq kóriniske keltiriwdi, sızıqlı algebradaǵı Lagranj usılı tiykarında ámelge asırıw algoritmin kórip shıǵamız. Bul usıl algebrada  $n$ -tártipli kvadratlıq formalar dı kanonikalıq túrge alıp keliwde keńnen qollanıladı. Bunda kvadratlıq formadan belgisizlerdiń izbe-iz tolıq kvadratın ajratıp alıw, yaǵnıy kvadratlıq formanıń qalǵan bóleginde gezektegi belgisizler bolmaytuǵınday etip aynımaǵan sızıqlı túrlendiriw orınlanadı. Koefficientlerinen dúzilgen matricası diagonal matrica kórinisine kelemen degen she usılayınsha aynımaǵan túrlendiriwler orınlap, ápiwayılastırıwlar arqalı kvadratlıq forma kanonikalıq túrge keltiriledi.

Endi Lagranj usılınıń analitikalıq geometriyada ekinshi tártipli betliklerdiń ulıwma teńlemesin kanonikalıq túrge alıp keliwde qollanılwı qanday? degen sorawına juwap izlep kóremiz.

Ekinshi tártipli betliklerdiń ulıwma teńlemesi Evklid keńisliginde dekart koordinatalar sistemasında berilgen bolsın.

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (1)$$

Bul jerde  $a_{ij} \in \mathbb{R}, a_{ij} = a_{ji}, a_{ij} (i, j = \overline{1, 3})$  koefficientleriniń keminde birewi nolge teń bolmawı kerek.

Meyli  $a_{11} \neq 0$  bolsın.  $X$  belgisizi qatnasqan qosındılardan  $a_{11}$  koefficientin ulıwma kóbeytiwshi dep qawıstıń sırtına shıǵaramız. Qawıs ishindegi anlatpanı tolıq kvadratqa keltiremiz:

$$a_{11} \left( x^2 + 2 \frac{a_{12}}{a_{11}} xy + 2 \frac{a_{13}}{a_{11}} xz + 2 \frac{a_{14}}{a_{11}} x \right) + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

$$a_{11} \left( x + \frac{a_{12}}{a_{11}} y + \frac{a_{13}}{a_{11}} z + \frac{a_{14}}{a_{11}} \right)^2 + \left( a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}} \right) y^2 + \left( a_{33} - \frac{a_{13}^2}{a_{11}} \right) z^2 + 2 \left( a_{23} - \frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}} \right) yz + 2 \left( a_{24} - \frac{a_{12}a_{14}}{a_{11}} \right) y + 2 \left( a_{34} - \frac{a_{13}a_{14}}{a_{11}} \right) z + a_{44} - \frac{a_{14}^2}{a_{11}} = 0$$

Tómendegishe belgilewler kiritip:

$$y' = x + \frac{a_{12}}{a_{11}} y + \frac{a_{13}}{a_{11}} z + \frac{a_{14}}{a_{11}}, b_{22} = a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}, b_{33} = a_{33} - \frac{a_{13}^2}{a_{11}}, b_{23} = a_{23} - \frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}}, b_{24} = a_{24} - \frac{a_{12}a_{14}}{a_{11}}, b_{34} = a_{34} - \frac{a_{13}a_{14}}{a_{11}}, b_{44} = a_{44} - \frac{a_{14}^2}{a_{11}}$$

$$a_{11}x'^2 + b_{22}y'^2 + b_{33}z'^2 + 2b_{23}yz + 2b_{24}y + 2b_{34}z + b_{44} = 0 \quad (2)$$

anlatpasına iye bolamız. Egerde  $b_{22} \neq 0$  bolsa,  $y$  belgisizi qatnasqan qosılıwshılardan  $b_{22}$  ni qawıstan shıǵarıp, qalǵan qosılıwshılardı jáne tolıq kvadratqa keltiremiz:

$$a_{11}x'^2 + b_{22} \left( y^2 + 2y \frac{b_{23}}{b_{22}} z + 2y \frac{b_{24}}{b_{22}} + \left( \frac{b_{23}}{b_{22}} z \right)^2 + \left( \frac{b_{24}}{b_{22}} \right)^2 + 2 \frac{b_{23}}{b_{22}} \frac{b_{24}}{b_{22}} z \right) - b_{22} \left( \frac{b_{23}}{b_{22}} z \right)^2 - b_{22} \left( \frac{b_{24}}{b_{22}} \right)^2 - 2 \frac{b_{23}b_{24}}{b_{22}} z + b_{33}z^2 + 2b_{34}z + b_{44} = 0$$

$$a_{11}x'^2 + b_{22} \left( y + \frac{b_{23}}{b_{22}} z + \frac{b_{24}}{b_{22}} \right)^2 + \left( b_{33} - \frac{b_{23}^2}{b_{22}} \right) z^2 + 2 \left( b_{34} - \frac{b_{23}b_{24}}{b_{22}} \right) z + \left( b_{44} - \frac{b_{24}^2}{b_{22}} \right) = 0$$

Tómendegishe belgilewler kirgizemiz:

$$y' = y + \frac{b_{23}}{b_{22}} z + \frac{b_{24}}{b_{22}}, c_{33} = b_{33} - \frac{b_{23}^2}{b_{22}}, c_{34} = b_{34} - \frac{b_{23}b_{24}}{b_{22}}, c_{44} = b_{44} - \frac{b_{24}^2}{b_{22}}$$

Sonda (2) – teńlik penen birgerlikte, tómendegige iye bolamız:

$$a_{11}x'^2 + b_{22}y'^2 + c_{33}z'^2 + 2c_{34}z + c_{44} = 0 \quad (3)$$

Egerde bul áńlatpada  $c_{33} \neq 0$  bolsa, úshinshi hám tórtinshi qosılıwshılardan  $C_{33}$ -ti qawıstıń sırtına shıǵarıp, qawıstaǵı qosılıwshılardı úsh aǵzalınıń tolıq kvadratına keltiriwdi orınlaymız:

$$a_{11}x'^2 + b_{22}y'^2 + c_{33} \left( z^2 + 2 \frac{c_{34}}{c_{33}} z + \left( \frac{c_{34}}{c_{33}} \right)^2 \right) - \frac{c_{34}^2}{c_{33}} + c_{44} = 0$$

$$a_{11}x'^2 + b_{22}y'^2 + c_{33} \left( z + \frac{c_{34}}{c_{33}} \right)^2 + c_{44} - \frac{c_{34}^2}{c_{33}} = 0$$

Tómendegishe belgilewler kirgizemiz:

$$z' = z + \frac{c_{34}}{c_{33}}, d_{44} = c_{44} - \frac{c_{34}^2}{c_{33}}$$

Joqarıdaǵı (3)-áńlatpa menen birge, tómendegige iye bolamız:

$$a_{11}x'^2 + b_{22}y'^2 + c_{33}z'^2 + d_{44} = 0 \quad (4)$$

Bul (4) áńlatpanıń ekinshi tártipli betliktiń kanonikalıq teńlemesi ekenligin kóremiz. Bunda  $a_{11}, b_{22}, c_{33}, d_{44}$  sanlarınń mánisleri hám belgilerine qaray tómendegi jaǵdaylar bolıwı múmkin:

**I.**  $a_{11}, b_{22}, c_{33}, d_{44}$  sanlarınń hesh biri nolge teń emes.

1.  $a_{11}, b_{22}, c_{33}$  - sanlarınń belgileri birdey, al  $d_{44}$  - nıń belgisi olarǵa qarama-qarsı:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (5)$$

Bul ellipsoida, bul jerde  $a = \frac{d_{44}}{a_{11}}, b = \frac{d_{44}}{b_{22}}, c = \frac{d_{44}}{c_{33}}$ .

a) Olar óz ara teń, yaǵnıy  $a = b = c$ -sanları teń – (5)-sfera;

b) Ekewi óz ara teń, yaǵnıy  $a = b \neq c$  - bolsa – (5)-aylanba ellipsoid;

c) Bir birine teń emes,  $a \neq b \neq c$  - bolsa – (5) – úsh kósherli ellipsoid;

2.  $a_{11}, b_{22}, c_{33}, d_{44}$  - sanlarınń belgileri birdey :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

Bul jorıma ellipsoid, bul jerde  $a = \frac{d_{44}}{a_{11}}, b = \frac{d_{44}}{b_{22}}, c = \frac{d_{44}}{c_{33}}$ .

3. Ekewiniń belgisi birdey, mısalı  $a_{11} > 0, b_{22} > 0, c_{33} < 0, d_{44} < 0$ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Bul jorıma kósheri Oz bolǵan bir gewekli giperboloidtıń teńlemesi. Basqa jaǵdaylarda da bir gewekli giperboloid (jorıma kósheri  $Ox, Oy$ ) boladı.

4. Dáslepki úsh koefficienttiń birewiniń belgisi qalǵanlarınń belgilerine qarama-qarsı,  $a_{11} > 0, b_{22} < 0, c_{33} < 0, d_{44} < 0$ :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Bul haqıyqıy kósheri  $Ox$  bolǵan eki gewekli giperboloidtıń teńlemesi. Basqa jaǵdaylarda da eki gewekli giperboloid (haqıyqıy kósheri  $Ox, Oy$ ) boladı.

**II.**  $a_{11}, b_{22}, c_{33}, d_{44}$  sanlarınń birewi nolge teń.

1. Meyli  $d_{44} = 0$ , al  $a_{11}, b_{22}, c_{33}$  sanlarınń belgileri birdey.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Bul jorıma konus (bir noqat) teńlemesi:

$$a = \frac{1}{a_{11}}, b = \frac{1}{b_{22}}, c = \frac{1}{c_{33}}.$$

2.  $d_{44} = 0$ , al  $a_{11}, b_{22}, c_{33}$  sanlarınń ekewi bir belgide, úshinshisi olarǵa qarama-qarsı belgige iye:  $a_{11} > 0, b_{22} > 0, c_{33} < 0$ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Bul konus (aylanıw kósheri Oz) teńlemesi:

$$a = \frac{1}{a_{11}}, b = \frac{1}{b_{22}}, c = \frac{1}{c_{33}}.$$

3.  $c_{33} = 0$ , al  $a_{11}, b_{22}, d_{44}$  koefficientleriniń belgileri birdey:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

Bul jorıma ellipslik cilindrdiń teńlemesi:

$$a = \frac{d_{44}}{a_{11}}, b = \frac{d_{44}}{b_{22}}.$$

4.  $c_{33} = 0$ , al  $a_{11}, b_{22}, d_{44}$  koefficientleriniń ekewi bir belgide, úshinshisi olarǵa qarama-qarsı:  $a_{11} > 0, b_{22} > 0, d_{44} < 0$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Bul ellipslik cilindrdiń teńlemesi:  $a = \frac{d_{44}}{a_{11}}, b = \frac{d_{44}}{b_{22}}$ .

5.  $c_{33} = 0$ , al  $a_{11}, b_{22}, d_{44}$  koefficientleriniń ekewi bir belgide, úshinshisi olarǵa qarama-qarsı:  $a_{11} > 0, d_{44} > 0, b_{22} < 0$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Bul giperbolalıq cilindrdiń teńlemesi:

$$a = \frac{d_{44}}{a_{11}}, b = \frac{d_{44}}{b_{22}}.$$

**III.**  $a_{11}, b_{22}, c_{33}, d_{44}$  sanlarınń ekewi nolge teń.

1. Meyli  $d_{44} = c_{33} = 0$ , al  $a_{11}, b_{22}$  sanlarınń belgileri birdey.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

Bul haqıyqıy tuwrı boylap kesiliskeń jorıma qos tegislik (bir noqat) teńlemesi:  $a = \frac{1}{a_{11}}, b = \frac{1}{b_{22}}$ .

2.  $d_{44} = c_{33} = 0$ , al  $a_{11}, b_{22}$  sanlarınń belgileri qarama-qarsı bolsa:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

Bul kesiliwshi haqıyqıy qos tegislik teńlemesi:

$$a = \frac{1}{a_{11}}, b = \frac{1}{b_{22}}.$$

3. Egerde  $b_{22} = c_{33} = 0$ , al  $a_{11}, d_{44}$  sanlarınıń belgileri birdey.

$$\frac{x^2}{a^2} = -1$$

Bul parallel jorıma qos tegislik teńlemesi:  $a = \frac{d_{44}}{a_{11}}.$

4. Egerde  $b_{22} = c_{33} = 0$ , al  $a_{11}, d_{44}$  sanlarınıń belgileri qarama-qarsı bolsa,

$$\frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Bul parallel qos tegislik teńlemesi:  $a = \frac{d_{44}}{a_{11}}.$

IV.  $a_{11}, b_{22}, c_{33}, d_{44}$  sanlarınıń úshewi nolge teń.

Meyli  $d_{44} = c_{33} = b_{22} = 0$ , al  $a_{11} \neq 0$ .

$$\frac{x^2}{a^2} = 0$$

Bul betlesken qos tegislik teńlemesi:  $a = \frac{1}{a_{11}}.$

V. Egerde (3) ańlatpasında  $c_{33} = 0$  hám  $c_{34} \neq 0$  bolsa, tómendegi jaǵdaylardaǵı betliklerge iye bolamız:

1.  $a_{11}, b_{22}$  sanlarınıń belgileri birdey:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz$$

Parametri  $p$  ellipslik paraboloidtıń teńlemesi, bul jerde

$$a = \frac{1}{a_{11}}, b = \frac{1}{b_{22}}, p = -c_{33}z' - \frac{c_{44}}{2}.$$

2.  $a_{11}, b_{22}$  sanlarınıń belgileri qarama-qarsı bolsa:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$$

Parametri  $p$  giperbolalıq paraboloidtıń teńlemesi, bul jerde  $a = \frac{1}{a_{11}}, b = \frac{1}{b_{22}}, p = -c_{33}z' - \frac{c_{44}}{2}.$

Eger (1) teńlemede  $a_{ii} (i = \overline{1,3})$  koefficientler bir

waqıtta nolge teń bolsa, onda tómendegishe túrlendiriwdi orınlaw arqalı (1) túrge alıp kelinedi:

$$x = x' + y'$$

$$y = x' - y'.$$

**Mısal:** Koordinatalar tuwrı múyeshli sistemasında

$2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz - 4x + 6y - 2z + 3 = 0$  betliktiń ulıwma teńlemesin ápiwayılastırıń.

**Sheshimi:**  $X^2$  aǵzasınıń koefficienti nolden ózgeshe bolǵanlıǵı sebepli,  $X$  ózgeriwshi boyınsha tolıq kvadratqa keltiremiz:

$$2(x^2 + 2xy + xz - 2x) + 2y^2 + 3z^2 + 2yz + 6y - 2z + 3 = 0$$

$$2\left(x + y + \frac{1}{2}z - 1\right)^2 - 2y^2 - \frac{1}{2}z^2 - 2 - 2yz +$$

$$+ 4y + 2z + 2y^2 + 3z^2 + 2yz + 6y - 2z + 3 = 0$$

$$x' = x + y + \frac{1}{2}z - 1, \quad y' = y, \quad z' = z \quad \text{belgilew kiritsek}$$

tómendegi kóriniske keledi:

$$2x'^2 + \frac{5}{2}z'^2 + 10y' + 1 = 0,$$

$$2x'^2 + \frac{5}{2}z'^2 + 10\left(y' + \frac{1}{10}\right) = 0,$$

eger  $x'' = x', y'' = y' + 1/10, z'' = z'$  dep belgilew kiritsek,

$$\frac{x''^2}{1/2} + \frac{z''^2}{2/5} = -10y''$$

Demek berilgen ulıwma teńleme ellipslik paraboloid teńlemesi boladı eken.

Juwmaqlap aytqanda, bul usıl arqalı ekinshi tártipli betliktiń ulıwma teńlemesin kanonikalıq kórinistegi 17 tiptegi kanonikalıq teńlemerdiń keminde bir teńlemesine alıp kelinedi.

### Ádebiyatlar

- Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. Учебное пособие. 13-е изд., стереот. – М.: ФИЗМАТ-ЛИТ, 2005. –С. 240. ISBN 5-9221-0252-4.
- Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия: Учеб. Для вузов. 7-е изд., стер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. –С. 224.
- Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник для вузов. 19-е изд., стер. – Санкт-Петербург: «Лань», 2022. –С. 448.
- Веселов А.П., Троицкий Е. В. Лекции по аналитической геометрии. Учебное пособие. Электронное издание. - М.: МЦНМО, 2017. –С.152. ISBN 978-5-4439-3064-0.
- Ушаков А.В. Классификация линий и поверхностей второго порядка. // Международный научно-исследовательский журнал. 2017. №3-1. -С. 57-60.
- Мироненко Л.П. Классификация канонических уравнений поверхностей второго порядка в пространстве  $R^4$ . Невырожденный случай. // Штучний інтелект. 2012. № 4. - С. 361-369.
- Мироненко Л.П., Петренко И.В. Матричный метод классификации поверхностей второго порядка. //Штучний інтелект. 2011.

**REZYUME.** Ushbu ishda umumiy ikkinchi darajali sirt tenglamasini tasniflash usullarini o'rganib chiqildi. Ish uslubiy yondashuvga qaratilgan bo'lib, ikkinchi darajali sirtning umumiy tenglamasini kanonik shaklga keltirish uchun Lagranj usulini qo'llashni o'z ichiga oladi.

**РЕЗЮМЕ.** В исследовании изучены методы классификации общего уравнения поверхности второго порядка. Работа ориентирована на методический подход и включает в себя применение метода Лагранжа для приведения общего уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду.

**SUMMARY.** This study deals with methods for classifying the general equation of a second-order surface. The work focuses on a methodical approach and includes the application of Lagrange method to reduce the general second order surface equation to a canonical form.