

REZYUME. Ushbu maqolada raqamli tasvirlardagi matnlarni tanib olishda OCR texnologiyalarining imkoniyatlari ko'rsatib o'tilgan. Python dasturlash tilining Open CV, Pytesseract, EasyOCR, Pillow kutubxonalari yordamida tasvirdagi matnlarni tanib olish usullari ko'rsatib o'tilgan.

РЕЗЮМЕ. В данной статье показаны возможности технологий OCR в распознавании текстов на цифровых изображениях. Показаны способы распознавания текстов на изображении с помощью библиотек Open CV, Pytesseract, EasyOCR, Pillow языка программирования Python.

SUMMARY. This article shows the capabilities of OCR technologies in recognizing texts on digital images. Methods for recognizing text in an image using the Open CV, Pytesseract, EasyOCR, and Pillow libraries of the Python programming language are shown.

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ ПРИМЕНЕНИЯ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА К КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

О.Д.Нуржанов – кандидат физико-математических наук, доцент

А.Б.Абутова – магистрант

Каракалпакский государственный университет имени Бердаха

Таянч сўзлар: сонли-аналитик усул, чегаравий масала, Вольтерра типидagi интегро-дифференциал тенгламалар, Коши-Николетти типидagi чегаравий шартлар.

Ключевые слова: численно-аналитический метод, краевая задача, интегро-дифференциальные уравнения типа Вольтерра, краевые условия типа Коши-Николетти.

Key words: numerical-analytic method, boundary value problem, integro-differential equations of Volterra type, boundary conditions of Cauchy-Nicoletti type.

Численно-аналитический метод последовательных приближений А.М.Самойленко [1] эффективно применяется при исследовании краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, а также различных классов интегро-дифференциальных уравнений [2, 3]. При рассмотрении краевых задач с линейными краевыми условиями возникают некоторые трудности применения этого метода из-за вырожденности матриц, фугирующих в этих условиях. Идея их преодоления содержится в работах [4, 5], посвященных исследованию решений краевых задач при помощи параметризации граничных условий.

В данной работе с помощью параметризации исследуем двухточечную краевую задачу типа Коши-Николетти для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра.

Рассмотрим систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f \left(t, x, \int_0^t \varphi(t, s, x(s)) ds \right) \quad (1)$$

с разделенными краевыми условиями типа Коши-Николетти

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_{10}, \\ x_2(0) &= x_{20}, \\ x_3(T) &= x_{3T}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $x = \text{col}(x_1, x_2, x_3)$; вектор-функции

$f(t, x, y) = (f_1, f_2, f_3)$ и $\varphi(t, s, x) = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ определены и непрерывны в области

$$(t, s) \in [0, T] \times [0, T], \quad x \in D, \quad y = (y_1, y_2, y_3) \in D_1, \quad (3)$$

D и D_1 - замкнутые ограниченные области R^3 .

Краевые условия (2) можно записать в матричном виде

$$Ax(0) + C_1x(T) = d, \quad (4)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{3T} \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрица C_1 в краевом условии (4) является вырожденным, то непосредственно применить известных схем численно-аналитического метода [1] невозможно или возможно трудности вычислительного характера. Поэтому, для того чтобы обойти вырожден-

ность матрицы C_1 , заменим значение первых двух компонент решения краевой задачи (1), (4) в точке T параметрами λ_1, λ_2 :

$$x_1(T) = \lambda_1, \quad x_2(T) = \lambda_2. \quad (5)$$

С учетом равенства (5), краевые условия (4) записываются в виде

$$Ax(0) + Cx(T) = d(\lambda) = \text{col}(x_{10} + \lambda_1, x_{20} + \lambda_2, x_{3T}), \quad (6)$$

где

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E, \quad \lambda = \text{col}(\lambda_1, \lambda_2).$$

Таким образом, краевая задача типа Коши-Николетти вида (1), (2) приводилась к эквивалентной двухточечной краевой задаче (1), (6) с условиями (5), причем $\det C \neq 0$.

Для исследования полученной краевой задачи (1), (6) можно применить соответствующую модификацию численно-аналитического метода последовательных приближений.

Пусть для краевой задачи (1), (2) выполняются следующие условия:

1) вектор-функции $f(t, x, y) = (f_1, f_2, f_3)$ и $\varphi(t, s, x) = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ определены и непрерывны в области (3) и для них выполняются следующие неравенства:

$$|f(t, x, y)| \leq M,$$

$$|f(t, x, y) - f(t, \bar{x}, \bar{y})| \leq K_1|x - \bar{x}| + K_2|y - \bar{y}|, \quad (7)$$

$$|\varphi(t, s, x) - \varphi(t, s, \bar{x})| \leq K_3|x - \bar{x}|$$

для всех $t \in [0, T], s \in [0, T], x, \bar{x} \in D, y, \bar{y} \in D_1$, где

$M = (M_1, M_2, M_3), M_i > 0, i = 1, 2, 3; \quad K_l = \{K_{ij}^{(l)}\}_{i,j=1}^3, \quad l = 1, 2, 3 - (3 \times 3)$ -мерные постоянные матрицы с неотрицательными элементами; $|f| = \text{col}(|f_1|, |f_2|, |f_3|)$;

2) множество

$$D_\beta = \{z \in D : B(z, \beta(z, \lambda)) \subset D, \quad \forall \lambda \in I_1 \times I_2\}$$

является невырожденным, т.е.

$$D_\beta \neq \emptyset, \quad (8)$$

где

$$B(z, \beta(z, \lambda)) = \{x \in R^3 : |x - z| \leq \beta(z, \lambda), \forall \lambda \in I_1 \times I_2\},$$

$$\beta(z, \lambda) = \frac{T}{2} M + |d(\lambda) - (A + E)z|,$$

E – единичная матрица,

$$I_1 \times I_2 = \{\lambda = \text{col}(\lambda_1, \lambda_2) \in R^2 : \text{col}(\lambda_1, \lambda_2, x_{3T}) \in D\};$$

3) наибольшее собственное значение $\lambda_{\max}(Q)$ матрицы $Q = \frac{T}{3} \left(\frac{9}{10} K_1 + \frac{7}{8} TK_2 K_3 \right)$ не превышает единицы:

$$\lambda_{\max}(Q) < 1. \quad (9)$$

Для исследования решений параметризованной краевой задачи (1), (6) рассмотрим последовательность функций

$$\begin{aligned} x_m(t, z, \lambda) = z + \\ + \int_0^t f(\tau, x_{m-1}(\tau, z, \lambda), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x_{m-1}(s, z, \lambda)) ds) d\tau - \\ - \frac{t}{T} \int_0^T f(\tau, x_{m-1}(\tau, z, \lambda), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x_{m-1}(s, z, \lambda)) ds) d\tau + \\ + \frac{t}{T} [d(\lambda) - (A + E)z], m = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (10)$$

$$x_0(t, z, \lambda) = z,$$

где z и λ рассматриваются как параметры.

Каждая функция последовательности (7) зависит от трех неизвестных параметров и, λ_1, λ_2 . Более того, функции $x_m(t, u, \lambda)$ удовлетворяют двухточечным краевым условиям (6) при произвольных значений этих параметров.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Предположим, что $f(t, x, y)$ и $\varphi(t, s, x)$ в правой части системы уравнений (1) определены, непрерывны в области (3) и выполняются условия (7)–(9). Тогда при всех фиксированных $z = \text{col}(x_{10}, x_{20}, u) \in D_\beta$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in D$ последовательность функций $x_m(t, z, \lambda)$ вида (10), удовлетворяющих краевым условиям (6), равномерно сходится при $m \rightarrow \infty$ относительно области $(t, z, \lambda) \in [0, T] \times D_\beta \times D$ к предельной функции $x^*(t, z, \lambda)$. При этом $x^*(t, z, \lambda)$ является проходящим

при $t = 0$ через точку $x^*(0, z, \lambda) = z$ решением уравнения

$$\begin{aligned} x(t) = z + \int_0^t f(\tau, x(\tau), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x(s)) ds) d\tau - \\ - \frac{t}{T} \int_0^T f(\tau, x(\tau), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x(s)) ds) d\tau + \frac{t}{T} [d(\tau) - (A + E)z], \\ \text{и кроме того, } x^*(t, z, \lambda) \text{ удовлетворяет краевым условиям (6) и начальным условиям } x^*(0, z, \lambda) = z, \text{ т.е. является} \\ \text{решением задачи Коши для уравнений} \\ \frac{dx}{dt} = f\left(t, x, \int_0^t \varphi(t, s, x(s)) ds\right) + \Delta(z, \lambda), \\ x(0) = z, \end{aligned}$$

где

$$\Delta(z, \lambda) = \frac{1}{T} \left[d(z, \lambda) - \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau, x(\tau), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x(s)) ds) d\tau \right].$$

Для отклонения $x^*(t, z, \lambda)$ от $x_m(t, z, \lambda)$ для всех $m = 1, 2, \dots$ имеет место оценка

$$|x^*(t, z, \lambda) - x_m(t, z, \lambda)| \leq \alpha_1(t) Q^{m-1} (E - Q^{-1}) h$$

где $Q = \frac{T}{3} \left(\frac{9}{10} K_1 + \frac{7}{8} TK_2 K_3 \right)$, $h = QM + Q_1 \beta_1(z, \lambda)$,

$$Q_1 = K_1 + \frac{3}{4} TK_2 K_3.$$

Следующее утверждение выясняет, при каких необходимых и достаточных условиях предельная функция последовательности (10) будет являться решением краевой задачи (1), (6).

Теорема 2. Предположим, что удовлетворяются все условия теоремы 1. Тогда для того, чтобы предельная функция $x = x^*(t, z^*, \lambda^*)$ последовательности (10) являлась и решением краевой задачи (1), (6) необходимо и достаточно, чтобы определяющая функция $\Delta(z, \lambda)$ в точке $x = z^*$, $\lambda = \lambda^*$ обращалась в нуль:

$$\begin{aligned} \Delta(z, \lambda) = \frac{1}{T} [d(z, \lambda) - z] - \\ - \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau, x^*(\tau, z, \lambda), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x^*(s, z, \lambda)) ds) d\tau = 0 \end{aligned}$$

Литература

1. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. - Киев: «Наук. Думка», 1992. –С. 279.
2. Nurzhanov O.D. Application of a modification of the numerical-analytic method to the multipoint boundary-value problem for Volterra-type integrodifferential equations. // Journal of Mathematical Sciences, 2021, №. 5. –P. 655-669.
3. Нуржанов О.Д., Курбанбаев О.О., Баймуратова К. А. Численно-аналитический метод исследования краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра // Вестник Каракалпакского государственного университета, 2013, №1-2. - С. 10-16.
4. Ронто М. Й., Щобак Н. М. Маринец К. В. Про параметризацію крайових задач типу Коші-Ніколетті // Наук. вісн. Ужгород. Нац. Ун-ту. Сер. Математика і інформатика, 2008, №16. - С. 163-173.
5. Ронто Н.И., Маринец Е. В. Применение параметризации при численно-аналитическом исследовании решений нелинейных краевых задач. // Доклады Национальной академии наук Украины, 2012, №4. - С. 34-38.
- РЕЗЮМЕ.** Маколада Вольтерра типидаги интегро-дифференциал тенгламалар учун икки нуктали чегаравий масалаларни ечишга кетма-кет якинлаштирилнинг сонли-аналитик методини татбиқ этиш бўйича баъзи натижалар олинган.
- РЕЗЮМЕ.** В работе получены некоторые результаты по применению численно-аналитического метода последовательных приближений к двухточечным краевым задачам для интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра.
- SUMMARY.** The paper obtained some results on the application of the numerical-analytic method of successive approximations to two-point boundary value problems for Volterra type integro-differential equations.