

TÁBIYIY HÁM TEXNIKALÍQ ILIMLER

Fizika. Matematika. Texnika. Informatika

УДК: 519.63+539.37 (575.1)

СВЯЗАННАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ В ДЕФОРМАЦИЯХ ДЛЯ ИЗОТРОПНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

У.З. Джумаёзов – доктор философии по физико-математическим наукам, доцент

НИИ развития цифровых технологий и искусственного интеллекта

Таянч сўзлар: термоэластик, деформация, бошланғич шартлар, ошкор ва ошкормас схемалар, чегаравий масала.

Ключевые слова: термоупругость, деформация, начальные условия, явная и неявная схемы, краевая задача.

Key words: thermoelasticity, deformation, initial conditions, explicit and implicit schemes, boundary value problem.

1. *Введение.* Формулировка краевых задач термоупругости относительно напряжений и деформаций является актуальной задачей механики твердого тела. Краевые задачи термоупругости относительно напряжений и деформаций, могут быть сформулированы в рамках условия совместности деформаций Сен-Венана [1].

Известно, что условия совместности деформаций, с помощью соотношения Дюамеля-Неймана и уравнения движения могут быть записаны относительно тензора напряжений в виде уравнений Бельтрами-Мичелла [4,5]. Уравнения Бельтрами-Мичелла в сочетании с тремя уравнениями движения составляет краевую задачу с девятью уравнениями и тремя граничными условиями [10].

В работах Бородачева [7,8] показаны, что первая группа трех уравнений Бельтрами-Мичелла зависимы от второй группы уравнений. В работах Победри [2,3,4] условия совместности и уравнения равновесия приведены к краевой задаче состоящих из шести уравнений относительно напряжений. В частном случае из уравнений Победри следуют уравнения Бельтрами-Мичелла. Вопросы эквивалентности постановки краевых задач в перемещениях и напряжениях рассмотрены в [7]. Вопросы существования и единственности решения краевых задач рассмотрены в [8,9]. Уравнения Бельтрами-Мичелла с учетом температуры рассмотрены в работе Новацкого [10].

Данная работа посвящена формулировке и численному решению связанных задач термоупругости в деформациях. Решение явных схем приведены к рекуррентным соотношениями относительно компонентов тензора деформаций и температуры. Неявные схемы, приведены к последовательному применению метода прогонки по соответствующим направлениям.

2. *Постановка связанной задачи термоупругости для параллелепипеда.* Известно [4,5,6], что связанная краевая задача термоупругости для изотропных состоит из уравнения движения

$$\sigma_{ij,j} + \rho X_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (1)$$

соотношения Дюамеля-Неймана

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0)\delta_{ij}, \quad (2)$$

соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (3)$$

уравнение притока тепла

$$\lambda_0 \theta_{,ii} - C_\varepsilon \dot{\theta} - T_0 \gamma \dot{\varepsilon}_{ii} = -w, \quad \gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha, \quad (4)$$

и, начальных и граничных условий

$$u_i|_{t=t_0} = \varphi_i, \quad \frac{\partial u_i}{\partial t}|_{t=t_0} = \psi_i, \quad T|_{t=t_0} = \tilde{T}, \quad (5)$$

$$u_i|_{\Sigma_1} = u_i^0, \quad \sigma_{ij} n_j|_{\Sigma_2} = S_i, \quad T|_{\Sigma} = T^0. \quad (6)$$

где σ_{ij} – тензор напряжений, ε_{ij} – тензор деформаций, u_i – перемещения, T – температура, λ, μ – упругие постоянные Ламе, θ – шаровая части тензора деформаций, S_i – поверхностная нагрузка, n_i – компоненты внешней нормали к поверхности Σ , X_i – объемные силы, δ_{ij} – символ Кронекера.

С помощью соотношений (2) и (3), уравнение движения может быть записано относительно перемещений [10] т.е.

$$\mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu)\theta_{,i} - (3\lambda + 2\mu)\alpha \frac{\partial T}{\partial x_i} + \rho X_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (7)$$

где ∇^2 – оператор Лапласа, $\theta = \varepsilon_{kk}$.

Продифференцируя уравнение (7) по x_j т.е.

$$\mu \nabla^2 u_{i,j} + (\lambda + \mu)\theta_{,ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T_{,ij} + \rho X_{i,j} = \rho \ddot{u}_{i,j}, \quad (8)$$

и, поменяв в (8) местами индексы i и j

$$\mu \nabla^2 u_{j,i} + (\lambda + \mu)\theta_{,ji} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T_{,ji} + \rho X_{j,i} = \rho \ddot{u}_{j,i}, \quad (9)$$

и, сложив уравнения (8) и (9) можно найти [2], что

$$\mu \nabla^2 \varepsilon_{ij} + (\lambda + \mu)\theta_{,ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T_{,ij} + \frac{1}{2}\rho(X_{i,j} + X_{j,i}) = \rho \ddot{\varepsilon}_{ij}. \quad (10)$$

Последнее соотношение представляет собой аналог уравнения совместности деформаций для термомеханических динамических процессов, и состоит из шести уравнений. Уравнение (10) также может найдено из условия Сен-Венана с помощью уравнения движения и соотношения Дюамеля-Неймана. При отсутствии объемных сил, уравнение (10) имеет вид

$$\mu \nabla^2 \varepsilon_{ij} + (\lambda + \mu)\theta_{,ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T_{,ij} = \rho \ddot{\varepsilon}_{ij}. \quad (11)$$

Заметим, что последнее уравнение получено из условия совместности с учетом закона Гука и уравнения движения, и фактически представляет другую форму условия совместности деформаций. Поэтому, следуя работе [10] можно назвать дифференциальными уравнениями совместности деформаций.

Для формулировки [4, 9] связанной краевой задачи теории упругости к уравнению (10) необходимо присоединить уравнения движения (1) и уравнения притока тепла

$$\lambda_0 \theta_{,ii} - C_\varepsilon \dot{\theta} - T_0 \gamma \dot{\varepsilon}_{ii} = -w. \quad (12)$$

Уравнению (11-12), будем смотреть в трехмерном случае соответствующими начальными и граничными условиями.

3. *Методы решения.* Этот параграф посвящен построению численной модели трехмерных задач рассмотренных, в параграфе 2.

Построив в параллелепипеде $t \geq 0$, $0 \leq x_i \leq l_i$ три семейства параллельных прямых $x_1 = ih_1$, $x_2 = jh_2$, $x_3 = kh_3$ ($i, j, k = \overline{0, n_m}, m = 1, 2, 3$), $t_i = l\tau$,

($l=0,1,2,\dots$) и следуя работам [6] заменяя производные в уравнении (11) разностными отношениями, можно найти следующие сеточные уравнения

$$\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu) \frac{\varepsilon_{i+1,j,k,l}^{11} - 2\varepsilon_{i,j,k,l}^{11} + \varepsilon_{i-1,j,k,l}^{11}}{h_1^2} + \\ & + (\lambda + \mu) \left(\frac{\varepsilon_{i+1,j,k,l}^{22} - 2\varepsilon_{i,j,k,l}^{22} + \varepsilon_{i-1,j,k,l}^{22}}{h_1^2} + \right. \\ & + \frac{\varepsilon_{i+1,j,k,l}^{33} - 2\varepsilon_{i,j,k,l}^{33} + \varepsilon_{i-1,j,k,l}^{33}}{h_1^2} \Big) + \\ & + \mu \left(\frac{\varepsilon_{i,j+1,k,l}^{11} - 2\varepsilon_{i,j,k,l}^{11} + \varepsilon_{i,j-1,k,l}^{11}}{h_2^2} + \right. \\ & + \frac{\varepsilon_{i,j,k+1,l}^{11} - 2\varepsilon_{i,j,k,l}^{11} + \varepsilon_{i,j,k-1,l}^{11}}{h_3^2} \Big) - \\ & - \gamma \frac{T_{i+1,j,k,l} - T_{i,j,k,l} + T_{i-1,j,k,l}}{h_1^2} = \\ & = \rho \frac{\varepsilon_{i,j,k,l+1}^{11} - 2\varepsilon_{i,j,k,l}^{11} + \varepsilon_{i,j,k,l-1}^{11}}{\tau^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Аналогичным образом найдём конечно-разностные уравнение для ε_{22} , ε_{33} , ε_{12} , ε_{13} , ε_{23} , T .

Эти разностные уравнения внутри области имеют второй порядок аппроксимации $O(h^2, \tau^2)$, и являются явными. Поэтому, разрешив эти разностные уравнения относительно ε_i^{l+1} и T_i^{l+1} соответственно, получим следующие рекуррентные соотношения т.е.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i,j,k,l+1}^{11} = & \frac{\tau^2}{\rho} \left((\lambda + 2\mu) \frac{\varepsilon_{i+1,j,k,l}^{11} - 2\varepsilon_{i,j,k,l}^{11} + \varepsilon_{i-1,j,k,l}^{11}}{h_1^2} + \right. \\ & + (\lambda + \mu) \left(\frac{\varepsilon_{i+1,j,k,l}^{22} - 2\varepsilon_{i,j,k,l}^{22} + \varepsilon_{i-1,j,k,l}^{22}}{h_1^2} + \right. \\ & + \frac{\varepsilon_{i+1,j,k,l}^{33} - 2\varepsilon_{i,j,k,l}^{33} + \varepsilon_{i-1,j,k,l}^{33}}{h_1^2} \Big) + \\ & + \mu \left(\frac{\varepsilon_{i,j+1,k,l}^{11} - 2\varepsilon_{i,j,k,l}^{11} + \varepsilon_{i,j-1,k,l}^{11}}{h_2^2} + \right. \\ & + \frac{\varepsilon_{i,j,k+1,l}^{11} - 2\varepsilon_{i,j,k,l}^{11} + \varepsilon_{i,j,k-1,l}^{11}}{h_3^2} \Big) - \\ & - \gamma \frac{T_{i+1,j,k,l} - T_{i,j,k,l} + T_{i-1,j,k,l}}{h_1^2} \Big) + \\ & + 2\varepsilon_{i,j,k,l}^{11} - \varepsilon_{i,j,k,l-1}^{11}. \end{aligned} \quad (14)$$

Аналогичным образом можно найти уравнения для остальных компонент тензора деформаций и температуры. Соотношения (14) позволяют найти значения искоемых функций $\varepsilon_i(x, y, t)$ на слое t^{l+1} если известны значения этих функций на двух предыдущих слоях. Значения функции $\varepsilon_i(x, y, t)$ на двух начальных слоях $k=0$ и $k=1$ могут быть найдены из начальных условий. Можно построить разностные схемы без ограничительных условий для шагов сетки по X и t . Для чего в первых слагаемых уравнений (11) индекс l заменяем на $l+1$, тогда разностная схема становится неявной

$$\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu) \frac{\varepsilon_{i+1,j,k,l+1}^{11} - 2\varepsilon_{i,j,k,l+1}^{11} + \varepsilon_{i-1,j,k,l+1}^{11}}{h_1^2} + \\ & + (\lambda + \mu) \left(\frac{\varepsilon_{i+1,j,k,l}^{22} - 2\varepsilon_{i,j,k,l}^{22} + \varepsilon_{i-1,j,k,l}^{22}}{h_1^2} + \right. \\ & + \frac{\varepsilon_{i+1,j,k,l}^{33} - 2\varepsilon_{i,j,k,l}^{33} + \varepsilon_{i-1,j,k,l}^{33}}{h_1^2} \Big) + \\ & + \mu \left(\frac{\varepsilon_{i,j+1,k,l}^{11} - 2\varepsilon_{i,j,k,l}^{11} + \varepsilon_{i,j-1,k,l}^{11}}{h_2^2} + \right. \\ & + \frac{\varepsilon_{i,j,k+1,l}^{11} - 2\varepsilon_{i,j,k,l}^{11} + \varepsilon_{i,j,k-1,l}^{11}}{h_3^2} \Big) - \\ & - \gamma \frac{T_{i+1,j,k,l} - T_{i,j,k,l} + T_{i-1,j,k,l}}{h_1^2} = \\ & = \rho \frac{\varepsilon_{i,j,k,l+1}^{11} - 2\varepsilon_{i,j,k,l}^{11} + \varepsilon_{i,j,k,l-1}^{11}}{\tau^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

и, её можно привести к следующему трехдиагональному виду, решаемого методом прогонки

$$a\varepsilon_{i+1,j,k,l+1}^{11} + b\varepsilon_{i,j,k,l+1}^{11} + c\varepsilon_{i-1,j,k,l+1}^{11} = f_{ijkl}^{11} \quad (16)$$

где a, b, c, f_i^k – коэффициенты.

Аналогичным образом для остальных уравнений (11), могут быть приведены к трех диагональному виду, с различными коэффициентами т.е.

$$\begin{aligned} \ddot{a}\varepsilon_{i+1,j,k,l+1}^{22} + \ddot{b}\varepsilon_{i,j,k,l+1}^{22} + \ddot{c}\varepsilon_{i-1,j,k,l+1}^{22} &= f_{ijkl}^{22}, \\ \dot{a}\varepsilon_{i+1,j,k,l+1}^{33} + \dot{b}\varepsilon_{i,j,k,l+1}^{33} + \dot{c}\varepsilon_{i-1,j,k,l+1}^{33} &= f_{ijkl}^{33}, \\ \tilde{a}\varepsilon_{i+1,j,k,l+1}^{12} + \tilde{b}\varepsilon_{i,j,k,l+1}^{12} + \tilde{c}\varepsilon_{i-1,j,k,l+1}^{12} &= f_{ijkl}^{12}, \\ a\varepsilon_{i+1,j,k,l+1}^{13} + b\varepsilon_{i,j,k,l+1}^{13} + c\varepsilon_{i-1,j,k,l+1}^{13} &= f_{ijkl}^{13}, \\ \ddot{a}\varepsilon_{i+1,j,k,l+1}^{23} + \ddot{b}\varepsilon_{i,j,k,l+1}^{23} + \ddot{c}\varepsilon_{i-1,j,k,l+1}^{23} &= f_{ijkl}^{23}, \\ AT_{i+1,j,k,l+1} + BT_{i,j,k,l+1} + CT_{i-1,j,k,l+1} &= F_{ijkl}^T. \end{aligned} \quad (17)$$

Из уравнений (17) следует, что решение разностных уравнений последовательно четырехкратному применению метода прогонки по соответствующим координатным осям.

4. Численные результаты. Явная и неявная разностные схемы связанной задачи термоупругости в деформациях, решались рекуррентными соотношениями и методом прогонки, соответственно, при следующих начальных и граничных условиях:

$$T(x, y, z, t)|_{t=0} = T_0 \sin\left(\frac{\pi x_i}{l_1}\right) \sin\left(\frac{\pi y_j}{l_2}\right) \sin\left(\frac{\pi z_k}{l_3}\right), \quad (18)$$

$$\varepsilon_{ii}(x, y, z, t)|_{t=0} = 0, \quad \varepsilon_{ij}(x, y, z, t)|_{t=0} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{ii}(x, y, z, t)|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{ij}(x, y, z, t)|_{t=0} = 0.$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ii}(x, y, z, t)|_{x=0} &= 0, \quad \varepsilon_{ii}(x, y, z, t)|_{x=l_1} = 0, \\ \varepsilon_{ij}(x, y, z, t)|_{x=0} &= 0, \quad \varepsilon_{ij}(x, y, z, t)|_{x=l_1} = 0, \\ T(x, y, z, t)|_{x=0} &= 0, \quad T(x, y, z, t)|_{x=l_1} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

и, исходных данных

$$\begin{aligned} T_0 &= 20, \quad \lambda = 0.78, \quad \lambda_0 = 0.06, \quad \alpha = 0.05, \quad \mu = 0.5, \\ \rho &= 0.86, \quad c_e = 3.5, \quad h_1 = h_2 = 0.1, \quad l_1 = l_2 = 1. \end{aligned}$$

Таблица 1. Значения функции $T(x, y, z, t)$ при $t=0.05, z=0.4, y=0.5$

	$x=0$	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$	$x=0.4$	$x=0.5$
Явная схема	0.000	5.720	10.863	14.933	17.539	18.437
Неявная схема	0.000	5.720	10.864	14.933	17.541	18.438

Таблица 2. Значения функции $\varepsilon_{11}(x, y, z, t)$ при $t=0.05, z=0.5, y=0.5$

	$x=0$	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$	$x=0.4$	$x=0.5$
Явная схема	0.000	0.014	0.027	0.038	0.044	0.046
Неявная схема	0.000	0.014	0.027	0.037	0.044	0.046

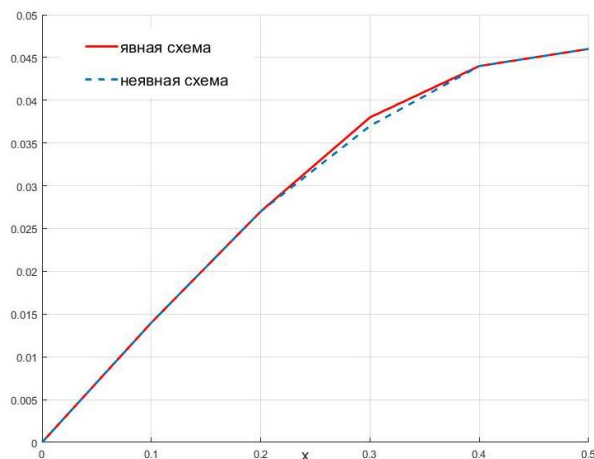


Рис 1. Сравнения распределения тензора деформаций при $t=0.05, y=0.5, z=0.5$

На рис. 1 сравнены кривые, показывающие изменение деформации по времени в срединной точке параллелепипеда, построенные по результатам полученных рекуррентным формулам (явная схема) и методом прогонки (неявная схема). Сравнение результатов по таблицам (таб. 1-2) и рисункам (рис. 1) показывают, что численные результаты, найденные по рекуррентным соотношениям и по методу прогонки достаточно близки, чем обеспечивается справедливость сформулированных краевых задач и достоверность полученных численных результатов.

5. **Заключение.** В рамках условий совместности Сен-Венан с помощью уравнений Ламе построены дифференциальные уравнения динамической термоупругости относительно деформаций. Сформулирована связанная краевая задача термоупругости в деформациях для параллелепипеда со свободной поверхностью находящегося в температурном поле куполообразной формы. Дискретные уравнения составлены конечно-разностным методом в виде явных и неявных схем. Решение явных схем приведены к рекуррентным соотношениям относительно компонентов деформаций и температуры. Неявные схемы решены по методу переменных направлений согласно методу прогонки по соответствующим направлениям.

Разработаны численные алгоритмы и соответствующее программное обеспечение для решения трехмерных термоупругих краевых задач. Исследовано влияние температурного поля на распределение деформаций и напряжений.

Литература

1. Andrianov I., Topol H. "Compatibility conditions: number of independent equations and boundary conditions," Mechanics and Physics of Structured Media, 2022, -P. 123-140. <https://doi.org/10.1016/b978-0-32-390543-5.00011-6>.
2. Pobedrya B.E., Sheshenin S.V. and T.Kholmatov, "Stress Problem," -Tashkent: «Fan», 1988, -P. 200.
3. Pobedrya B.E. "New formulation of the problem of mechanics of a deformable solid body in stresses," Report of the Academy of Sciences of the USSR, vol. 253, 2, 1980, -P. 295-297.
4. Pobedrya B.E. "Numerical methods in the theory of elasticity and plasticity," -M.: Publishing House of Moscow State University, 1996, -P.343.
5. Georgievski D.V., Pobedrya B.E. On the number of independent compatibility equations in the mechanics of a deformable solid. Prikl. Mat. Mekh. 68 (2004), no. 6, 1043–1048; translation in J. Appl. Math. Mech. 68 (2004), no. 6, 941–946 2005.
6. Samarski A.A., Nikolaev E.S. "Methods for solving grid equations." -Moscow: «Science», 1978, -P.592.
7. Borodachev N.M. "Three-dimensional problem of the theory of elasticity in strains," Strength of Materials, 1995, 27 (5-6), pp. 296–299. <https://doi.org/10.1007/bf02208501>
8. Borodachev N.M. "Stress Solutions to the Three-Dimensional Problem of Elasticity," International Applied Mechanics, 42 (2006), pp. 849–878. <https://doi.org/10.1007/s10778-006-0154-4>.
9. Li S., Gupta, A., Markenscoff X. "Conservation laws of linear elasticity in stress formulations," Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2005, 461 (2053), pp. 99–116. <https://doi.org/10.1098/rspa.2004.1347>
10. Ike C. "On Maxwell's stress functions for solving three-dimensional elasticity problems in the theory of elasticity," Journal of Computational Applied Mechanics, 2018, 49 (2), -P. 342–350. doi: <https://doi.org/10.22059/JCAMECH.2018.266787.330>

РЕЗЮМЕ. Мазкур иш деформациялардаги термоэластикнинг боғланган динамик масалаларини математик ва сонли моделлаштиришга бағишланган. Тегишли бошланғич ва чегаравий шартларга эга бўлган параллелепипед учун деформациялардаги термоэластикнинг сонли боғланган чегаравий масаласи тузилган ва сонли ечилган.

РЕЗЮМЕ. Настоящая работа посвящена математическому и численному моделированию термоупругости связанной динамической задачи в деформациях. Сформулирована и решена численно краевая задача термоупругости в деформациях для параллелепипеда с соответствующими начальными и краевыми условиями.

SUMMARY. This work is devoted to mathematical and numerical modeling of the coupled dynamic problem of thermoelasticity in deformations. A numerically related boundary value problem of thermoelasticity is formulated and solved in deformations for a parallel-epiped with the corresponding initial and boundary conditions

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASIDA QISHLOQ XO'JALIGI MAHSULOTLARINI YETISHTIRISH VA TASHISHNING HOZIRGI HOLATI

B.Z.Ergashev – doktorant

Toshkent davlat transport universiteti

Tayanch soʻzlar: meva-sabzovot mahsulotlari, intermodal tashishlar, refriyator konteyner.

Ключевые слова: фрукты и овощи, интермодальные перевозки, контейнер-рефрижератор.

Key words: fruit-vegetable products, intermodal transportation, refrigerator containers.

Kirish. O'zbekiston Respublikasi, markaziy Osiyo mintaqasining markazida joylashgan bo'lib, qadimdan qishloq xo'jaligi sanotining rivojlanganligi bilan qo'shni davlatlardan farq qilib turadi. Bu soha mamlakat iqtisodiyotining asosiy tarmoqlaridan biri hisoblanadi va aholining katta qismi uchun asosiy daromad manbayi deb baholanadi. Qishloq xo'jaligi mahsulotlarini yetishtirish va ularni tash-

ish, O'zbekistonning iqtisodiy barqarorligi va rivojlanishi uchun muhim ahamiyatga ega. Ushbu ilmiy maqola, O'zbekiston qishloq xo'jaligi sohasida so'nggi yillarda ro'y berayotgan o'zgarishlar, yangi yondashuvlar va ularning iqtisodiyotga ta'sirini tahlil qiladi. Shuningdek, mahsulotlarni yetishtirishdan tortib, ularni ichki va tashqi bozorlarga tashishgacha bo'lgan jarayonlar ko'rib chiqiladi.