

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НА ОСНОВЕ НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТОК

А.А.Каландаров – доктор философии физико-математических наук, доцент
Гулистанский государственный педагогический институт

Таянч сўзлар: термоэластиклик, кучланишлар, деформациялар, ошкор схема, ошкор бўлмаган схема, яқинлашиш.

Ключевые слова: термоупругость, напряжения, деформации, явная схема, неявная схема, сходимость.

Key words: thermoelasticity, stresses, strains, explicit scheme, implicit scheme, convergence.

Вопросы математического и компьютерного моделирования напряженного состояния конструкций и их элементов из различных материалов и определение запасов их прочности является актуальной задачей механики деформируемого твердого тела.

В работах [1,3] рассмотрены упругопластические процессы и построение их математических моделей в разных постановках. Авторами работ [5] предложены конечно-разностные методы для численного решения краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными с использованием неравномерных сеток. Авторами работ [2,4] предложены численные методы решения статических и динамических, связанных и несвязанных задач термоупругости и термопластичности для изотропных и анизотропных тел, эти методы основаны на конечно-разностный подход с использованием равномерных сеток.

В настоящей работе предложен новый алгоритм для разбиения двумерных областей на основе неравномерной сетки. Для демонстрации метода разработки неравномерных сеток, и их метода численного решения, для простоты рассмотрим статическую краевую задачу теории упругости, состоящую из уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad (1)$$

закона Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad \theta = \varepsilon_{kk} \quad (2)$$

соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3)$$

и, соответствующих граничных условий

$$u_i|_{\Sigma_1} = u_i^0, \quad \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j|_{\Sigma_2} = S_i^0 \quad (4)$$

где σ_{ij} – тензор напряжений, ε_{ij} – тензор деформаций,

u_i – компоненты перемещения, θ – шаровая часть тензора деформаций, λ, μ – упругие постоянные Ламе,

X_i – объемная сила, δ_{ij} – символ Кронекера, n_j – внешняя нормаль к поверхности Σ_2 , S_1, S_2, S_3 – компоненты вектора внешней нагрузки.

Продemonстрируем суть алгоритма построения неравномерной сетки для двумерной области. Для чего, предположим, что, пусть нам необходимо вычислить значения искомых функций (перемещения, деформации, напряжения) на четырех произвольных точках, лежащих внутри рассматриваемой двумерной области Рис.1.

Проводя параллельные линии к осям OX и OY проходящие через данные точки, будем иметь неравномерную, сетку, показанную на Рис.2.

Известно, что при переходе от равномерной сетки к неравномерной, порядок аппроксимации разностных уравнений понижается. Для того чтобы избежать этого понижения порядка аппроксимации мы рассмотрим неравномерную сетку максимально близкой к равномерной. Как видно на Рис.2 шаги сетки h_x^i и h_y^i

($i=1,2,\dots,5$) неравномерны, возьмём некую величину h ($0 < h \leq l/10$, например $h=l_i/10$ где l_i длины сторон рассматриваемой прямоугольной области), с помощью которой будем построить неравномерную сетку (Рис.2) близкой к равномерной сетке с шагом h . Для этого будем проверять условия $h_x^i \geq h$ ($h_y^i \geq h$), промежуток на котором выполняется условие $x^k - x^{k-1} = h_x^k \geq h$, делим на две равные части.

Проверим шаги сетки h_x^i из Рис.2. Предположим, что $h_x^1 > h$, в этом случае согласно выше сказанному будем иметь следующую неравномерную сетку, показанную в Рис.3.

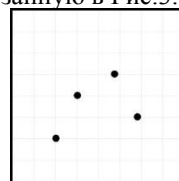


Рис 1.

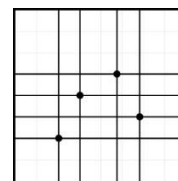


Рис 2.

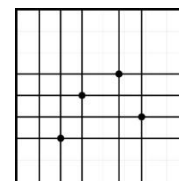


Рис 3.

Каждый раз, когда встречается промежуток $h_x^k > h$ и мы делим его на две части, проверка продолжается с k того промежутка. Далее предположим, что на Рис.3 $h_x^4 > h$, разделяя его на две части имеем Рис. 4.

Далее продолжая работу, из Рис.4 можно увидеть, что $h_x^7 > h$, разделяя его имеем Рис.5.

Когда все промежутки по оси OX выполняют условие $h_x^i \leq h$, продолжаем проверять промежутки сетки h_y^i по оси OY . Предположим $h_y^1 > h$, разделяя его на две части, будем иметь Рис.6.

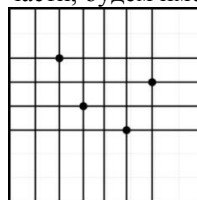


Рис 4.

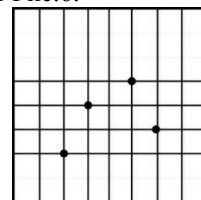


Рис 5.

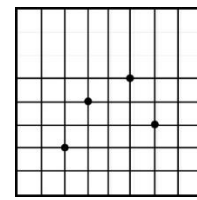


Рис 6.

Когда выполняется условие $h_y^i \leq h$ во всех промежутках по оси OY , процесс разбиения заканчивается.

Напомним, что, нам интересны численные значения искомых функций только в четырех точках, лежащих внутри рассматриваемой области Рис.1, остальные узловые точки играют вспомогательную роль для получения хороших результатов в четырех точках.

Рассмотрим построения численной модели задачи (1-4) на основе неравномерной сетки.

Запишем уравнения равновесия относительно перемещений

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0 \\ \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Уравнения (5), для простоты рассмотрим в прямоугольной области $\Omega = \{0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2\}$ со следующими краевыми условиями:

$$\begin{aligned} u(x, y)|_{y=0} &= 0, \quad v(x, y)|_{y=0} = \sin \frac{\pi x}{l_1}, \quad u(x, y)|_{y=l_2} = \\ &= 0, \quad v(x, y)|_{y=l_2} = -\sin \frac{\pi x}{l_1}, \\ u(x, y)|_{x=0} &= \sin \frac{\pi y}{l_2}, \quad v(x, y)|_{x=0} = 0, \quad u(x, y)|_{x=l_1} = \\ &= -\sin \frac{\pi y}{l_2}, \quad v(x, y)|_{x=l_1} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Для построения конечно-разностной схемы для двухмерной краевой задачи теории упругости (5-6), мы имеем следующие узловые точки неравномерной сетки

$$x_i = h_1 \cdot i, \quad i = \overline{0, n_1}, \quad y_j = h_2 \cdot j, \quad j = \overline{0, n_2}.$$

Заменяя производные в краевой задаче (5-6) разностными отношениями, можно найти основные разностные уравнения

$$\begin{aligned} &(\lambda + 2\mu) \left(\frac{u_{i+1,j}}{b \cdot c} - \frac{u_{i,j}}{a \cdot b} + \frac{u_{i-1,j}}{a \cdot c} \right) + \\ &+ (\lambda + \mu) \frac{v_{i+1,j+1} - v_{i-1,j+1} - v_{i+1,j-1} + v_{i-1,j-1}}{c \cdot c_1} - \\ &+ \mu \left(\frac{u_{i,j+1}}{b_1 \cdot c_1} - \frac{u_{i,j}}{a_1 \cdot b_1} + \frac{u_{i,j-1}}{a_1 \cdot c_1} \right) = 0 \\ &(\lambda + 2\mu) \left(\frac{v_{i,j+1}}{b_1 \cdot c_1} - \frac{v_{i,j}}{a_1 \cdot b_1} + \frac{v_{i,j-1}}{a_1 \cdot c_1} \right) + \\ &+ (\lambda + \mu) \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{c \cdot c_1} - \\ &+ \mu \left(\frac{v_{i+1,j}}{b \cdot c} - \frac{v_{i,j}}{a \cdot b} + \frac{v_{i-1,j}}{a \cdot c} \right) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} a &= (x_i - x_{i-1}), \quad b = (x_{i+1} - x_i), \quad c = (x_{i+1} - x_{i-1}), \\ a_1 &= (y_i - y_{i-1}), \quad b_1 = (y_{i+1} - y_i), \quad c_1 = (y_{i+1} - y_{i-1}) \end{aligned}$$

Обычно при решении конечно-разностными методами задачи типа (5)-(6) используются равномерные сетки по координатам. В конечно-разностных уравнениях (7) нами использованы неравномерные шаги сетки по координатам. Далее, разрешив полученные разностные уравнения относительно u_i^j, v_i^j соответственно получим следующие рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} u_i^j &= \left((\lambda + 2\mu) \left(\frac{u_{i+1,j}}{b \cdot c} + \frac{u_{i-1,j}}{a \cdot c} \right) + \mu \left(\frac{u_{i,j+1}}{b_1 \cdot c_1} + \frac{u_{i,j-1}}{a_1 \cdot c_1} \right) \right) / \\ &/ \left(\frac{\lambda + 2\mu}{a \cdot b} + \frac{\mu}{a_1 \cdot b_1} \right) \\ v_i^j &= \left((\lambda + 2\mu) \left(\frac{v_{i+1,j+1}}{b_1 \cdot c_1} + \frac{v_{i-1,j-1}}{a_1 \cdot c_1} \right) + \mu \left(\frac{v_{i+1,j}}{b \cdot c} + \frac{v_{i-1,j}}{a \cdot c} \right) \right) / \\ &/ \left(\frac{\lambda + 2\mu}{a_1 \cdot b_1} + \frac{\mu}{a \cdot b} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Далее, на основе соотношений (8) организуем следующий итерационный процесс по индексу $k = 0, 1, 2, \dots$

$$u_{i,j}^{(k+1)} = \left((\lambda + 2\mu) \left(\frac{u_{i+1,j}^{(k)}}{b \cdot c} + \frac{u_{i-1,j}^{(k)}}{a \cdot c} \right) + \mu \left(\frac{u_{i,j+1}^{(k)}}{b_1 \cdot c_1} + \frac{u_{i,j-1}^{(k)}}{a_1 \cdot c_1} \right) \right) / \left(\frac{\lambda + 2\mu}{a \cdot b} + \frac{\mu}{a_1 \cdot b_1} \right) \quad (9)$$

$$v_{i,j}^{(k+1)} = \left((\lambda + 2\mu) \left(\frac{v_{i+1,j+1}^{(k)}}{b_1 \cdot c_1} + \frac{v_{i-1,j-1}^{(k)}}{a_1 \cdot c_1} \right) + \mu \left(\frac{v_{i+1,j}^{(k)}}{b \cdot c} + \frac{v_{i-1,j}^{(k)}}{a \cdot c} \right) \right) / \left(\frac{\lambda + 2\mu}{a_1 \cdot b_1} + \frac{\mu}{a \cdot b} \right)$$

с учётом краевых условий (6)

$$\begin{aligned} u_{i_0}^{(0)} &= 0, \quad v_{i_0}^{(0)} = \sin \frac{\pi x_i}{l_1}, \quad u_{i_{n_2}}^{(0)} = 0, \quad v_{i_{n_2}}^{(0)} = -\sin \frac{\pi x_i}{l_1}, \\ u_{0j}^{(0)} &= \sin \frac{\pi y_j}{l_2}, \quad v_{0j}^{(0)} = 0, \quad u_{n_1j}^{(0)} = -\sin \frac{\pi y_j}{l_2}, \quad v_{n_1j}^{(0)} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

При нулевом приближении, т.е. при $k = 0$ узловые значения искомых величин $u_{ij}^{(0)}, v_{ij}^{(0)}$ на границе прямоугольной области Ω известны по краевым условиям (10). Во внутренних узлах, значения перемещений в нулевом приближении ($k = 0$) считаются тривиальными.

Далее, продолжая итерационный процесс можно найти искомые значения перемещений u_{ij}, v_{ij} с заданной точностью ε . Сходимость итерационного метода достигается согласно обобщенной теореме о сходимости итерационных методов.

Заметим, что следующие функции

$$u = \cos \frac{\pi x}{l_1} \sin \frac{\pi y}{l_2}, \quad v = \sin \frac{\pi x}{l_1} \cos \frac{\pi y}{l_2} \quad (11)$$

удовлетворяют краевым условиям (6).

Подставляя (11) в уравнения (5) можно убедиться в том, что при следующих значениях объёмных сил, уравнения (10) тождественно равны нулю

$$\begin{aligned} X_1 &= -(\lambda + 2\mu) \frac{\pi^2}{l_1^2} \cos \frac{\pi x_i}{l_1} \sin \frac{\pi y_j}{l_2} - \\ &- (\lambda + \mu) \frac{\pi^2}{l_1 l_2} \cos \frac{\pi x_i}{l_1} \sin \frac{\pi y_j}{l_2} - \mu \frac{\pi^2}{l_2^2} \cos \frac{\pi x_i}{l_1} \sin \frac{\pi y_j}{l_2} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} X_2 &= -(\lambda + 2\mu) \frac{\pi^2}{l_2^2} \sin \frac{\pi x_i}{l_1} \cos \frac{\pi y_j}{l_2} - \\ &- (\lambda + \mu) \frac{\pi^2}{l_1 l_2} \sin \frac{\pi x_i}{l_1} \cos \frac{\pi y_j}{l_2} - \mu \frac{\pi^2}{l_1^2} \sin \frac{\pi x_i}{l_1} \cos \frac{\pi y_j}{l_2} \end{aligned}$$

Таким образом, функции u, v (11) являются точным решением краевой задачи (5-6) при объёмных силах (12).

Итерационный процесс (9-10) продолжается до тех пор, пока не выполняется следующее условие $\|\vec{u}^{(k+1)} - \vec{u}^{(k)}\| \leq \varepsilon$, где $\|\cdot\|$ квадратичная норма последовательных приближений разности вектора перемещений $\vec{u}$ в пространстве L_2 .

Пусть уравнения Ламе (5) рассматриваются в прямоугольной области $\Omega = \{0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2\}$. Согласно

граничным условиям (6) прямоугольник находится под действием кинематических условий в виде синусообразных перемещений. При численном решении задачи исходные значения параметров имели следующие значения:

$$\mu = 0.5, \quad \lambda = 0.8, \quad l_1 = l_2 = 1, \quad N_1 = N_2 = 10.$$

В следующей таблице 1. приведены значения узловых точек после проведения процедуры разбиения неравномерной сетки.

Таблица 1. Значения узловых точек

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0.09	0.23	0.28	0.433	0.5	0.59	0.72	0.79	0.92	1
y_i	0	0.093	0.25	0.3	0.41	0.5	0.57	0.73	0.81	0.908	1

Таблица 2. Значения функции $u(x,y)$ при $\varepsilon = 0.001$ (итерационный метод)

	$x=0$	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$	$x=0.4$	$x=0.5$	$x=0.6$	$x=0.7$	$x=0.8$	$x=0.9$	$x=1$
$y=0$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$y=0.1$	0.2880	0.2667	0.1995	0.1694	0.0496	-0.0046	-0.0779	-0.1758	-0.2169	-0.2721	-0.2880
$y=0.2$	0.7071	0.6791	0.5194	0.4416	0.1293	-0.0129	-0.2050	-0.4593	-0.5636	-0.6904	-0.7071
$y=0.3$	0.8090	0.7722	0.5901	0.5004	0.1457	-0.0154	-0.2326	-0.5211	-0.6401	-0.7851	-0.8090
$y=0.4$	0.9603	0.9211	0.7055	0.6004	0.1739	-0.0185	-0.2786	-0.6242	-0.7647	-0.9356	-0.9603
$y=0.5$	1.0000	0.9599	0.7382	0.6262	0.1824	-0.0197	-0.2915	-0.6515	-0.7992	-0.9750	-1.0000

Таблица 3. Значения функции $u(x,y)$ (точное решение)

	$x=0$	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$	$x=0.4$	$x=0.5$	$x=0.6$	$x=0.7$	$x=0.8$	$x=0.9$	$x=1$
$y=0$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$y=0.1$	0.2880	0.2766	0.2161	0.1836	0.0602	0.0000	-0.0804	-0.1836	-0.2276	-0.2790	-0.2880
$y=0.2$	0.7071	0.6790	0.5304	0.4507	0.1477	0.0000	-0.1973	-0.4507	-0.5587	-0.6849	-0.7071
$y=0.3$	0.8090	0.7769	0.6069	0.5157	0.1690	0.0000	-0.2257	-0.5157	-0.6392	-0.7836	-0.8090
$y=0.4$	0.9603	0.9222	0.7203	0.6121	0.2006	0.0000	-0.2679	-0.6121	-0.7588	-0.9301	-0.9603
$y=0.5$	1.0000	0.9603	0.7501	0.6374	0.2089	0.0000	-0.2790	-0.6374	-0.7902	-0.9686	-1.0000

В таблицах 2 и 3 приведены численные результаты рассматриваемой задачи, полученные предложенным итерационным методом и точного решения, соответственно. Сравнение численных результатов показывают, что полученные приближенные решения достаточно близки к точному решению на разработанных неравномерных сетках согласно предложенному разбиению. Предложенный алгоритм может быть использован при численном решении пластических и термо-упруго-пластических краевых задач.

Литература

1. Ilyushin A.A. Plastic. Part 1. Elastoplastic deformations // Gostekhnizdat. – Moscow: 2004. – P. 391.
2. Khaldjigitov A.A., Long N.M. A.N., Qalandarov A., Eshkuvatov Z.K. (2014). Mathematical and numerical modelling of the thermoplastic coupled problem. In International Conference on Mathematical Sciences and Statistics 2013: 69-75. https://doi.org/10.1007/978-981-4585-33-0_8
3. Pobedria B.E. Deformation theory of plasticity of anisotropic media. // -PMM, 1984, 48, №1, -P.29-37.
4. Qalandarov, A.A., Khaldjigitov, A.A. (2020). Mathematical and numerical modeling of the coupled dynamic thermoelastic problems for isotropic bodies. TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics, 11(1): 119-126.
5. Samarski A.A., Mazhukin V.I., Matus P.P. Difference schemes on non-uniform grids for a two-dimensional parabolic equation // T. 34, №7. 1998, - P. 980-987.

РЕЗЮМЕ. Мақолада эластиклик назариясининг икки ўлчовли статик масалаларини сонли ечиш учун қадамлари бир хил бўлмаган тўрларда чекли айирмалар тенгламаларни куришнинг янги усули таклиф қилинган.

РЕЗЮМЕ. В данной статье предложен новый способ построения конечно-разностных уравнений на неравномерных сетках для численного решения двухмерных статических задач теории упругости.

SUMMARY. This article proposes a new method for constructing finite-difference equations on non-uniform grids for the numerical solution of two-dimensional static problems in the theory of elasticity.

ЎЗБЕКИСТОННИНГ РЕАЛ ИҚЛИМ ШАРОИТИДА КУЁШ ПАНЕЛЛАРИДА ЮЗАГА КЕЛАДИГАН НУҚСОНЛАРНИНГ ТАЪСИРИНИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛ ТАДҚИҚОТЛАР АСОСИДА АНИҚЛАШ

М.М.Комилов – тадқиқотчи

Гулистон давлат университети

Таянч сўзлар: куёш электр станцияси, куёш панеллари, поликристал элементлар, электр энергия, температура, чиқиш характеристикаси, EVA плёнкаси, куёш радиация, ёруғлик интенсивлиги, деградация жараёнлари.

Ключевые слова: солнечная электростанция, солнечные панели, поликристаллические элементы, электрическая энергия, температура, выходная характеристика, пленка EVA, солнечная радиация, интенсивность света, процессы деградации.

Key words: solar power plant, solar panels, polycrystalline elements, electrical energy, temperature, output characteristic, EVA film, solar radiation, light intensity, degradation processes.

Кириш. Ҳозирда бутун дунёда қайта тикланувчи энергия манбаларига бўлган талаб кундан кунга ортиб бормоқда. Мамалакатимиз қайта тикланувчи энергия манбаларини ривожлантириш давлатимиз сиёсати даражасига кўтарилди. Бунга сабаб, мамлакатимиз қайта тикланувчи манбалардан фойдаланиш учун улкан салоҳиятга эгалигидир. Мавжуд салоҳиятни ишга солиш, узок муддатли ва барқарор энергия таъминоти даражасини кўтаришда ёрдам беради.

2025 йилга келиб Республикамизда қайта тикланувчи энергия манбалари электр энергиясини ишлаб чиқаришдаги улушини 12,7 фоиздан 19,7 фоизга етказиш мўлжалланган. Жумладан: гидроэлектростанциялар улушини 12,7 фоиздан 15,8 фоизга, куёш фото электрик станцияларини 2,3 фоизга, шамол электрстанцияларини эса 1,6 фоизга етказиш режалаштирилган [1].