

коэффициент усиления K_p таким образом, чтобы амплитуда автоколебаний оставалась постоянной. Цепь самонастройки в данной системе замкнута. Здесь выходные сигналы релейного элемента могут рассматриваться как пробные сигналы, а ИА – как элемент, оценивающий реакцию системы на эти сигналы. При расчете цепи самонастройки необходимо учитывать, что U_0 не должно уменьшаться ниже некоторого предела, определяемого выполнением условия инвариантности системы к возмущающему воздействию $F(t)$ и ковариантности к управляющему сигналу $G(t)$. Это относится и к случаю, когда самонастройка производится за счет изменения коэффициента усиления элементов, включенных после релейного элемента.

Если изменения коэффициента усиления элементов регулятора и величины U_0 не позволяют удовлетворить условие инвариантности для всех трех характерных режимов работы ИСАУ, то необходимо использовать самонастройку путем изменения частоты автоколебаний с введением форсирующих элементов в усилитель $K_p / (T_p p + 1)$ (см. рис. 2).

Характерной особенностью автоколебательных систем является прохождение полезного низкочастотного задающего сигнала $G(t)$ и высокочастотных сигналов автоколебаний с разными коэффициентами усиления (см. рис. 2). Это объясняется тем, что коэффициент усиления релейного элемента по высокочастотной гармонической составляющей равен [1, 2]:

$$q(\beta_0, A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \varphi(\beta_0 + A \sin G) \sin G dG \quad (5)$$

где A – амплитуда автоколебаний; β_0 – постоянная составляющая, поступающая на вход релейного элемента.

При симметричных автоколебаниях $\beta_0 = 0$ и коэффициент усиления

$$q(A) = \frac{4U_0}{\pi A}. \quad (6)$$

По низкочастотной составляющей (по управляющему сигналу) коэффициент усиления равен $k_H = (\partial q_0 / \partial \beta_0)_{\beta_0} = \beta_{зад}^0$ где в общем случае

$$q(\beta_0, A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\beta_0 + A \sin G) dG \quad (7)$$

Для релейного элемента получим

$$q(\beta_0, A) = \frac{2U_0}{\pi} \arcsin \frac{\beta_0}{A}, \quad k_H = \frac{2U_0}{\pi A} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_0/A}}. \quad (8)$$

Это различие в коэффициентах усиления позволяет создать систему с совмещенной цепью самонастройки, в результате чего значительно упрощается система управления в целом. В такой ИСАУ вместо обычного усилителя устанавливается регулируемый релейный усилитель, в котором выходная величина U_0 изменяется в зависимости от амплитуды автоколебаний. В результате амплитуда автоколебаний остается неизменной за счет стабилизации коэффициента усиления системы по управляющему сигналу. При этом если коэффициент усиления линейной части уменьшается, то эквивалентный коэффициент усиления релейного регулятора увеличивается. Самонастраивающаяся ИСАУ с регулируемым релейным усилителем отличается от ИСАУ, представленной на рис. 2, тем, что в ней место замера амплитуды перенесено из точки a в точку b , а элементы ИА и ИЭ совмещены с релейным усилителем с насыщением. Применение таких ИСАУ является весьма перспективным для управления объектами, допускающими наличие автоколебаний выходной регулируемой величины. Для предотвращения забросов регулируемой величины и срыва автоколебаний при резком изменении управляющего сигнала $G(t)$ последний предварительно пропускается через модель W_M сглаживающего фильтра (см. рис. 2).

Литература

1. Бесекерский В.А. Теория систем автоматического управления. / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. – М.: «Наука», 2003.
2. Кориков А.М. Основы теории управления. – Томск: Изд-во НТЛ, 2002. – С. 392.
3. Бейнарович В.А. Инвариантные самонастраивающиеся системы автоматического управления. // Докл. Том. гос. ун-та систем управления и радиоэлектроники. 2008. № 1(17). – С. 61–64.

РЕЗЮМЕ

Ушбу илмий мақолада ўз-ўзидан тебраниш режимида ишлайдиган ўрни кучайтиргичи билан инвариант автоматик бошқарув тизимларини қуриш ва ҳисоблаш усуллари принциплари тавсифланган.

РЕЗЮМЕ

Излагаются принципы построения и методы расчета инвариантных систем автоматического управления с релейным усилителем, работающих в режиме автоколебаний.

SUMMARY

The principles of construction and calculation methods are described for invariant automatic control systems with a relay amplifier operating in the mode of self-oscillations.

УДК 621.315.592

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ КВАНТОВОГО ОГРАНИЧЕНИЯ НА ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ СФЕРИЧЕСКИХ КВАНТОВЫХ ТОЧЕК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЧАСТИЦЫ В МОДЕЛИ ЛОВУШКИ

К.А.Корабев – базовый докторант

У.К.Сапаев – доктор физико-математических наук

Ташкентский государственный технический университет

Таянч сўзлар: Шредингер тенгламаси, квант нукта, яримўтказгич, копкондаги квант зарра, электрон ва тешиқлар.

Ключевые слова: Уравнение Шредингера, квантовая точка, полупроводник, квантовая частица в ловушке, электроны и дырки.

Key words: Schrödinger equation, quantum dot, semiconductor, quantum particle in trap, electron and holes.

Введение. Ограниченные системы электронов в квантовых точках (КТ) – уникальная возможность изу-

чить фундаментальные квантовые теории в управляемой атомно-подобной системе [1]. КТ, а также кванто-

вые проволоки или квантовые ямы проявляют свойства стандартной атомной физики в результате ограничения движения электронов в зоне проводимости и дырок в валентной зоне конечной областью нано-метрового размера [2]. КТ достигли большого предела, невиданного в полупроводниках и других квантовых структурах [3]. Эффект квантового измерения, характеризующийся синим сдвигом оптических спектров, наблюдался в КТ из-за увеличения предельной энергии их носителей заряда [4].

КТ в основном представляют собой нуль-мерные нано-кристаллы. Сильное ограничение электронов и дырок по пространству аналогично трехмерному квантовому ограничению их волновых функций [5]. Теперь известно, что уникальные оптические свойства КТ связаны с квантовым ограничивающим эффектом [6]. Тот факт, что дискретные энергетические уровни КТ связывают их ближе к атомам, чем к объемным материалам, привел к прозвищу КТ «искусственные атомы». Значения уровней энергии в КТ обратно пропорциональны квадрату их размерности [7]. В данной работе теоретически исследованы излучательные процессы, возникающие при полупроводниковых сферических КТ типа CdSe, GaP и GaAs, и их оптические свойства с использованием квантово-механической модели частиц в ловушках.

Теоретическая часть. Если ограниченный размер свободной частицы намного больше длины волны Де Бройля, частица ведет себя как плоская волна. В этом случае энергетические уровни соответствуют состоянию непрерывной энергии. Однако при уменьшении квантового предела и достижении определенного предела, обычно на нано-масштабе, спектр свободной энергии частицы начинает быть дискретным. В результате оптические свойства частицы остаются зависимыми от энергии между двумя и более чем одной энергетических уровней. По мере уменьшения объема полупроводникового материала электроны и дырки сходятся, и энергия, необходимая для их рекомбинации, увеличивается, что в конечном итоге приводит к изменению длины световой волны светового излучения.

Мы ниже рассматриваем влияние квантового ограничения на КТ, используя модель «квантовая частица в ловушке». Модель частицы в ловушке окружена непроницаемым барьером, который объясняет способность частицы свободно перемещаться в ограниченном пространстве [8]. Простейшая модель - одномерная система, в которой одиночная частица массы m находится в ловушке длиной L , из которой она не может выбраться. Эта квантово-механическая система, которая соответствует частице в ловушке, позволяет студентам-физикам применять квантовую механику для решения реальных проблем. Сначала запишем уравнение Шредингера в следующем виде [9].

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + [E - V(x)]\phi(x) = 0 \quad (1)$$

Здесь уравнение Шредингера решается следующим образом, чтобы получить волновую функцию и энергию частицы, ограниченной в одномерной ловушке на дискретных уровнях.

Пусть ограниченная частица (электроны и дырки) ограничена бесконечно высокими потенциальными

барьерами, в этом случае потенциал частицы удовлетворяет следующим условиям.

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, x = L \\ \infty, & x < 0, x > L \end{cases} \quad (2)$$

В граничных условиях волновая функция равна нулю.

Потенциальная функция в поле равна нулю. В этом случае уравнение Шредингера равно.

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + E\phi(x) = 0 \quad (3)$$

Мы ищем решение этого простого дифференциального уравнения в следующем виде.

$$\phi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (4)$$

$$\text{Здесь } k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Используя граничные условия, энергия удержания частицы (электрон и дырка) в одномерной ловушке выражается следующим образом:

$$E_n = \frac{n^2 \pi \hbar^2}{2mL^2} = \frac{n^2 h^2}{8mL^2} \quad (5)$$

Где m - масса частицы, L - длина ловушки, а n - главное квантовое число. Вышеприведенное уравнение показывает, что энергия частицы квантуется в результате необходимости выполнения граничных условий, наложенных на систему. Однако минимальное количество энергии частицы находится при $n = 1$, что означает, что наименьшая энергия частицы никогда не равна нулю и соответствует:

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2} \quad (6)$$

В КТ электроны и дырки настолько ограничены, что свободно перемещаются внутри КТ, но не могут выйти наружу, как частица в ловушке. Однако мы внесли некоторые исправления, чтобы скрыть их несоответствия. Во-первых, внутри квантовых точек видны не одна, а две частицы (электроны и дырки) в частице в ловушке. Во-вторых, КТ имеют сферическую форму, а не геометрически квадратную, поэтому длина L -ловушки заменяется радиусом R , и, в-третьих, электронная и дырочная массы заменяются их эффективными массами из-за их взаимодействия с кристаллической решеткой.

В КТ запишем предельную энергию электронов и дырок согласно выражению (5) следующим образом:

$$E = \frac{nh^2}{8m_e^*R^2} + \frac{nh^2}{8m_h^*R^2} \quad (7)$$

В КТ предельная энергия электронов и дырок в основном состоянии (6) определяется выражением:

$$E = \frac{h^2}{8m_e^*R^2} + \frac{h^2}{8m_h^*R^2} \quad (8)$$

Таким образом, ширина запрещенной зоны КТ такая же, как и у обычных полупроводников. Ниже приводится энергия связи электронов и дырок в КТ:

$$\Delta E(R) = E_g + \frac{h^2}{8R^2} \left(\frac{1}{m_e^*} + \frac{1}{m_h^*} \right) \quad (9)$$

Это уравнение представляет собой энергию и длину волны света, излучаемого при изменении радиуса КТ. λ описывает эффект Излучаемая здесь световая энергия $\Delta E(R) = hc/\lambda$, c - скорость света, E_g - ширина за-

прецессной зоны, h - постоянная Планка, R - радиус КТ. m_e^* и m_h^* эффективная масса электрона и дырки.

Поскольку предельная энергия зависит от размера квантовых точек, мы можем определить оптические свойства поглощения света и испускаемого излучения, изменив размер квантовой точки. Чем больше КТ, тем более красный цвет в начале поглощения и тем ниже энергия излучаемого светового спектра. Напротив, меньшие КТ поглощают и излучают лучи более высокой энергии. Недавние статьи в нанотехнологиях и других журналах начали предполагать, что форма квантовой точки также может быть фактором окраски, но информации пока недостаточно. Мы также можем видеть, что длина волны излучаемого света определяется радиусом КТ [10]. Изменяя радиус КТ, мы можем легко увидеть влияние поглощенной и испускаемой световой энергии и длины волны. Для этого выразим зависимость энергии (предела) света, излучаемого из КТ, и длины волны от радиуса КТ выражением (9).

Полученные результаты и их анализ. Используя таблицу 1, предельная энергия для КТ, состоящих из полупроводников CdSe, GaP и GaAs, и между двумя уровнями (E_g) графики зависимости энергии и длины волны испускаемого света от радиуса КТ были получены по уравнению 9.

Таблица 1. Материальные параметры, использованные для исследования

КТ	m_e^*	m_h^*	E_g
CdSe	0,13 м0	0,45 м0	1,74 эВ
GaP	0,29 м0	0,41 м0	2,27 эВ
GaAs	0,06 м0	0,51 м0	1,42 эВ

На рисунке 1 длина волны света, излучаемого при изменении радиуса КТ, состоящих из полупроводников CdSe, GaP и GaAs. λ и зависимость от предельной энергии.

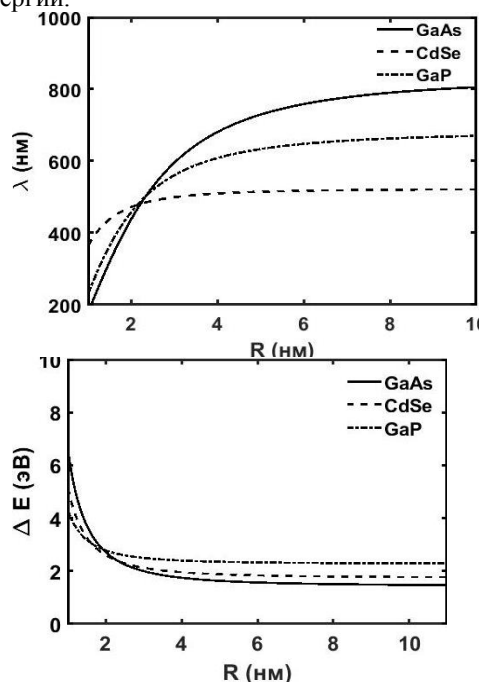


Рисунок 1. График зависимости изменения радиусов КТ CdSe, GaP и GaAs от длины волны излучаемого света (слева) и предельной энергии (справа).

Как видно из этого графика, мы видим излучение с высокой длиной волны при увеличении радиуса КТ и излучение с низкой длиной волны при уменьшении радиуса КТ. Например, после 4,85 нм в КТ из CdSe, 7,95 нм в КТ из GaP и 8,3 нм в КТ из GaAs длина волны остается почти неизменной [11].

Кроме того, как видно из графика выше (справа), влияние радиуса КТ на граничную энергию ниже после 4 нм в КТ, состоящем из GaP, 4,7 нм в КТ, состоящем из CdSe, и 5,6 нм в КТ, состоящий из GaAs, который является слабым квантом. Показывает эффект (ограничение). По мере увеличения радиуса КТ предельная энергия уменьшается, но никогда не стремится к нулю для различных рассматриваемых КТ, то есть они касаются более низкой энергии зоны проводимости.

Таким образом, энергия КТ между поверхностями обратно пропорциональна размеру точки (радиусу), потому что, когда размер точки уменьшается, он значительно увеличивается из-за ограничения электронов. Это означает, что самые большие КТ генерируют энергию между самыми маленькими уровнями (красный спектр), а самые маленькие КТ генерируют энергию между самыми большими уровнями (синий спектр). Результаты приведенных выше графиков можно увидеть в таблице ниже.

Таблица 2

КТ	КТ R (нм)	λ (нм)	ΔE (эВ)	цвет
CdSe	1,5–2,24	470	2,45	Синий
	2,1	500	2,1	Синий
	3	504	2	Зеленый
	3,5	509	1,9	Зеленый
	4			Зеленый
GaP	2,1	480	2,7	Синий
	3	564	2,5	Желтый
	3,5	588	2,4	Желтый
	4	609	2,396	красный
GaAs	4–10			красный
	2,1	475	2,7	Синий
	3	598	1,9	красный
	3,5	648	1,8	красный
	4	681	1,7	красный
	4,3–10			Инфракрасный

Если не учитывать энергию между двумя уровнями, то предельная энергия частиц определяется выражением (8). Мы определяем изменение этой энергии в зависимости от радиуса КТ через рисунок 2 ниже.

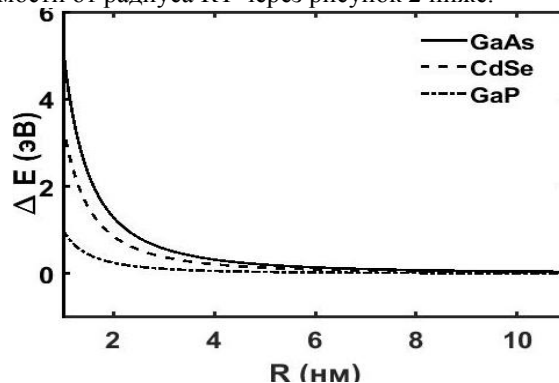


Рисунок 2. Изменение энергии в зависимости от радиуса КТ

Результаты показывают, что дискретные энергетические уровни появляются в зонах проводимости и валентности, потому что теперь энергетические уровни имеют небольшие и ограниченные расстояния из-за ограниченного количества электронов и, следовательно, синего сдвига энергии перехода. Предельная энергия электронов внутри КТ значительно увеличивается с уменьшением размера КТ, что указывает на сильный квантовый эффект измерения. Как видно из рисунка 2, после 4–6 нм влияние размера КТ на предельную энергию меньше для разных КТ, поэтому кажется, что они находятся под слабым ограничивающим эффектом.

Заклучение. Таким образом в данной работе с помощью модели частицы в ловушке изучено влияние квантового ограничения на энергетический спектр сферических квантовых точек CdSe, GaP и GaAs. Было показано, что в квантовых точках уровни энергии свободных электронов в зоне проводимости и дырок в валентной зоне становятся дискретным по мере уменьшения их размер. Также было показано, что энергия между двумя уровнями зависит от измерения квантовых точек и увеличивается с уменьшением размера квантовых точек. Наши результаты показали, что по мере увеличения радиуса предельной точки энергия уменьшалась, но никогда не достигала нулевой отметки.

Литература

- Schaller and R. D., Klimov V. I. "High Efficiency Carrier Multiplication in PbSe Nanocrystals: Implications for Solar Energy Conversion," *Physical Review Letters*, Vol. 92, No. 18, 2004, Article ID 186601. [doi:10.1103/PhysRevLett.92.186601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.186601)
- Wang C., Shim M. and Guyot-Sionnest P. "Electrochromic Nanocrystal Quantum Dots," *Science*, Vol. 291, No. 5512, 2001, -P. 2390. [doi:10.1126/science.291.5512.2390](https://doi.org/10.1126/science.291.5512.2390)
- Martyniuk P. and Rogalski A. "Quantum-Dot Infrared Photodetectors: Status and Outlook," *Progress in Quantum Electronics*, Vol. 32, No. 3-4, 2008, -P. 89-120. [doi:10.1016/j.pquantelec.2008.07.001](https://doi.org/10.1016/j.pquantelec.2008.07.001)
- Lagatsky A.A., Leburn C.G., C. T. A. Brown, W. Sibbett, S. A. Zolotovskaya and E. U. Rafailov, "Ultrashort-Pulse Lasers Passively Mode Locked by Quantum-Dot-Based Saturable Absorbers," *Progress in Quantum Electronics*, Vol. 34, N. 1, 2010, pp. 1-45. [doi:10.1016/j.pquantelec.2009.11.001](https://doi.org/10.1016/j.pquantelec.2009.11.001)
- Sinclair J. and Dagotto Dr., "An Introduction to Quantum Dots: Confinement, Synthesis, Artificial Atoms and Applications," *Solid State II Lecture Notes*, University of Tennessee, Knoxville, 2009.
- Michler P. "Single Quantum Dots: Fundamentals, Applications and New Concept, Physics and Astronomy Classification Scheme (PACS)," Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- Brus L.E., "Electron-Electron and Electron-Hole Interactions in Small Semiconductor Crystallites: The Size Dependence of the Lowest Excited Electronic State," *Journal of Chemical Physics*, Vol. 80, No. 9, 1984, p. 4403. [doi:10.1063/1.447218](https://doi.org/10.1063/1.447218)
- Kayanuma Y., "Quantum-Size Effects of Interacting Electrons and Holes in Semiconductor Microcrystals with Spherical Shape," *Physical Review B*, Vol. 38, No. 14, 1988, pp. 9797-9805. [doi:10.1103/PhysRevB.38.9797](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.38.9797)
- Kippeny T., Swafford L. A. and Rosnethal S. A. "Semiconductor Nanocrystals: A Powerful Visual Aid for Introducing the Particle in a Box," *Journal of Chemical Education*, Vol. 79, No. 9, 2002, pp. 1094-1100. [doi:10.1021/ed079p1094](https://doi.org/10.1021/ed079p1094)
- Brus L.E. "A Simple Model for the Ionization Potential, Electron Affinity and Aqueous Redox Potentials of Small Semiconductor Crystallites," *Journal of Chemical Physics*, Vol. 79, No. 11, 1983, pp. 5566-5571. [doi:10.1063/1.445676](https://doi.org/10.1063/1.445676)
- Harbold J. M. "The Electronic and Optical Properties of Colloidal Lead Selenide Semiconductor Nanocrystals," Ph.D. Dissertation, Cornell University, New York: 2005.

РЕЗЮМЕ

Қопкондағи заррача моделидан фойдаланиб квант чегараланишининг CdSe, GaP ва GaAs сферик квант нукталарининг энергетик спектрига таъсири ўрганилди. Квант нукталарда ўтказувчанлик зонасидаги эркин электронлар ва валент зонасидаги коваклар энергетик сатҳлари дискрет бўлиши кўрсатилди. Бундан ташқари, икки сатҳ орасидаги энергия квант нукталар ўлчамига боғлиқ бўлиши ва квант нукталар ўлчамининг камайиши билан ошиши кўрсатилди. Бизнинг натижаларимиз шуни кўрсатдики, чеклаш нуктаси радиуси ошгани сайин энергия пасайиб кетди, лекин ҳеч қачон нолга тенг бўлмади.

РЕЗЮМЕ

С помощью модели частицы в ловушке изучено влияние квантового ограничения на энергетический спектр сферических квантовых точек CdSe, GaP и GaAs. Было показано, что в квантовых точках уровни энергии свободных электронов в зоне проводимости и дырок в валентной зоне становятся дискретным по мере уменьшения их размер. Также было показано, что энергия между двумя уровнями зависит от измерения квантовых точек и увеличивается с уменьшением размера квантовых точек. Наши результаты показали, что по мере увеличения радиуса предельной точки энергия уменьшалась, но никогда не достигала нулевой отметки.

SUMMARY

Using the particle model is studied in the trap, the effect of quantum limitation on the energy spectrum of spherical quantum dots CdSe, GaP, and GaAs. The energy levels of the free electrons in the conduction band and the holes in the valence band at the quantum dots have been shown to be discrete. It has also been shown that the energy between the two levels depends on the measurement of the quantum dots and increases with decreasing the size of the quantum dots. Our results show that as the radius of the limit point increases, the energy decreases, but never the zero mark.

LERE-KOPPELMANNÍŇ TIYKARGÍ INTEGRALLÍQ FORMULASÍ HÁM ONNAN KELIP SHÍGÍWSHÍ NÁTIYJE

B.J.Qutimuratov – doktorant

Ájiniyaz atındağı Nókis mámleketlik pedagogikalıq instituti

A.B.Ubbiniyazova – magistrant

Berdaq atındağı Qaraqalpaq mámleketlik universiteti

Tayanch sózlar: differentsial forma, golomorf yadroli integral formula, vektor funktsiya, anıq forma.

Ключевые слова: дифференциальная форма, интегральная формула с голоморфным ядром, векторная функция, точная форма.

Key words: differential form, integral formula with holomorphic kernel, vector function, exact form.

Bir ózgeriwshili yamasa kóp ózgeriwshili funkciylar teoriysında integrallıq formulalardı úyreniw áhmiyetli orındı iyeleydi. Bunıń tiykargı sebebi, onıń funkciyalar teoriysında sonday-aq matematika, fizikanıń basqa da tarawlarında keń qollanıwlarǵa iye bolıwında. Ásirese yadroslı golomorf bolǵan integrallıq formulalar júdá keń qollanıwlarǵa iye.

Biraqta kóp ólshewli keńislikte bunday bir waqıttıń ózinde hám yadroslı golomorf bolǵan, hám qálegen shegaralanǵan oblast ushın jaramlı bolǵan integrallıq formulanı jaratıw ańsat másele emes. Kóp kompleks ózgeriwshili golomorf funkciyalar ushın bazı bir $D \subset C^n$ oblastlar klassında orınlı bolǵan golomorf yadroli integrallıq formulalar (A.Veyl [1],