

517.957

ИНТЕГРИРОВАНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА С НАГРУЖЕННЫМ ЧЛЕНОМ И ИСТОЧНИКОМ В ВИДЕ СУММЫ

Т.Ж.Алланазарова - ассистент преподаватель

Каракалпакский государственный университет имени Бердаха

Таянч сўзлар: модифицирланган Кортевег-де Фриз тенгламасы, Дирак оператори, спектрал берилганлар, тескари спектрал масала, Дубровин тенгламалар системаси, излар формуласи.

Ключевые слова: модифицированные уравнения Кортевега-де Фриза, оператор Дирака, спектральные данные, обратная спектральная задача, система уравнений Дубровина, формулы следов.

Key words: Modified Korteweg-de Vries equations, Dirac operator, spectral data, inverse spectral problem, Dubrovin system of equations, trace formulas.

Хорошо известно, что интегрирование нелинейного эволюционного уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ), модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза (мКдФ), нелинейного уравнения Шрёдингера и синус-Гордон в классе периодических функций существенно зависят от количества нетривиальных лакун в спектре периодического оператора Штурма-Лиувилля и Дирака.

С помощью метода обратной задачи (МОРЗ) для оператора Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом, когда в спектре имеется только конечное число нетривиальных лакун в работах Итса, Матвеева [1], и Дубровина, Новикова [2] была доказана полная интегрируемость уравнения КдФ в классе конечнозонных периодических и квазипериодических функций. В работах [3]-[6] с помощью МОРЗ для периодического оператора Дирака была установлена полная интегрируемость нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ) и модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза (мКдФ) в классе конечнозонных функций.

Нагруженными дифференциальными уравнениями в литературе принято называть уравнения, содержащие в коэффициентах или в правой части какие либо функционалы от решения, в частности значения решения или его производных на многообразиях меньшей размерности. Исследования таких уравнений представляют интерес как с точки зрения построения общей теорий дифференциальных уравнений, так и с точки зрения приложений. Среди работ, посвященных нагруженным уравнениям, следует отметить работы А.М. Нахушева [7], [8], А.И. Кожанова [9].

Известно ([10]), что если $q(x) = 2a \cos 2x$, $a \neq 0$, то в спектре оператора Штурма - Лиувилля $Ly = -y'' + q(x)y$, $x \in R$ открыты все лакуны, иначе говоря, $q(x)$ - бесконечнозонный периодический потенциал. Аналогичные примеры имеются для периодического оператора Дирака [11]-[13].

В связи с этим мы изучаем задачу Коши для модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с нагруженным членом и источником в виде суммы

$$q_t = a(t)q(x_0, t) \left[6q^2 q_x - q_{xxx} \right] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k(t) s_1(\pi, \lambda_k, t) \left[\left(\psi_1(x, \lambda_k, t) \right)^2 - \left(\psi_2(x, \lambda_k, t) \right)^2 \right], \quad (1)$$

$$q(x, t) \Big|_{t=0} = q_0(x), \quad x \in R \quad (2)$$

в классе действительных бесконечнозонных π -периодических по X функций:

$$q(x + \pi, t) = q(x, t) \in C_x^3(t > 0) \cap C_t^1(t > 0) \cap C(t \geq 0), \quad (3)$$

где $a(t) \in C[0, \infty)$ - заданная действительная не

прерывная ограниченная функция, а $x_0 \in R$. Здесь $\alpha_k(t)$ - заданная действительная непрерывная функция, имеющая равномерную асимптотику

$$\alpha_k(t) = O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \rightarrow \pm\infty.$$

Кроме того, $\psi = (\psi_1(x, \lambda, t), \psi_2(x, \lambda, t))^T$, $x \in R$, $t > 0$ - решение Флоке (нормированное условием $\psi_1(0, \lambda, t) = 1$) следующего уравнения Дирака

$$L(t)y \equiv B \frac{dy}{dx} + \Omega(x, t)y = \lambda y, \quad x \in R, \quad t > 0 \quad (4)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & q(x, t) \\ q(x, t) & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1(x, t) \\ y_2(x, t) \end{pmatrix}.$$

а λ_k - границы спектра оператора $L(t)$.

Через $c(x, \lambda, t) = (c_1(x, \lambda, t), c_2(x, \lambda, t))^T$ и $s(x, \lambda, t) = (s_1(x, \lambda, t), s_2(x, \lambda, t))^T$ - обозначено решение уравнения (4), удовлетворяющее начальным условиям $c(0, \lambda, t) = (1, 0)^T$ и $s(0, \lambda, t) = (0, 1)^T$ соответственно.

В данной работе предлагается алгоритм построения решения $q(x, t), \psi(x, \lambda_k, t)$, $k \in Z, x \in R, t > 0$ задачи (1)-(3), с помощью обратной спектральной задачи для оператора Дирака.

Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

Теорема 4. Пусть $q(x, t), \psi(x, \lambda_k, t)$, $x \in R, t > 0, k \in Z$ является решением задачи Коши (1)-(3). Тогда границы спектра $\lambda_n(\tau, t)$, $n \in Z$ оператора Дирака

$$L(\tau, t) \equiv B \frac{dy}{dx} + \Omega(x + \tau, t)y = \lambda y, \quad x \in R, \quad t > 0 \quad (5)$$

не зависят от параметров τ и t , а спектральные параметры $\xi_n = \xi_n(\tau, t)$, $\sigma_n = \sigma_n(\tau, t) = \pm 1$, $n \in Z$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi) \{-2\xi_n a(t) q(x_0, t) \cdot [q^2(\tau, t) + q_\tau(\tau, t) + 2\xi_n^2] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\xi_n \alpha_k(t) s_1(\pi, \lambda_k, \tau, t)}{\xi_n^2 - \lambda_k^2}\}, \quad n \in Z. \quad (6)$$

Знаки $\sigma_n(\tau, t) = \pm 1$, $n \in Z$ меняется при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau, t)$, $n \in Z$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия:

$$\xi_n(\tau, t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \sigma_n(\tau, t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), n \in Z, \quad (7)$$

где $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n \in Z$ - спектральные параметры оператора Дирака $L(\tau, 0)$ с коэффициентом $q_0(x + \tau)$, $\tau \in R$.

Здесь, через $s(x, \lambda, \tau, t) = (s_1(x, \lambda, \tau, t), s_2(x, \lambda, \tau, t))^T$ обозначено решение уравнения (5), удовлетворяющее начальным условиям $s_1(0, \lambda, \tau, t) = 0$, $s_2(0, \lambda, \tau, t) = 1$.

Следствие 1. Учитывая формулы следов

$$q^2(\tau, t) + q'_\tau(\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2}{2} - \xi_k^2(\tau, t) \right), \quad (8)$$

$$q(\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \sigma_k(\tau, t) h_k(\xi(\tau, t)) \quad (9)$$

систему (9) можно переписать в замкнутой форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial t} &= 2(-1)^n \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi) \cdot \\ &\cdot \left\{ a(t) \xi_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \sigma_k(x_0, t) h_k(\xi(x_0, t)) \cdot \right. \\ &\cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2 - 2\xi_k^2(\tau, t)) + 4\xi_n^2(\tau, t) \right] + \\ &\left. + \xi_n(\tau, t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_k(t) s_1(\pi, \lambda_k, \tau, t)}{\xi_n^2 - \lambda_k^2} \right\}, \quad n \in Z. \end{aligned} \quad (10)$$

Следствие 2. Эта теорема дает метод решения задачи (1)-(3). Для этого, сначала найдем спектральные данные λ_n , $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau) = \pm 1$, $n \in Z$, оператора Дирака $L(\tau, 0)$ соответствующие коэффициенту $q_0(x + \tau)$, $\tau \in R$. Обозначим спектральные данные оператора $L(\tau, t)$ через λ_n , $\xi_n(\tau, t)$, $\sigma_n(\tau, t) = \pm 1$, $n \in Z$. Теперь в систему уравнение (10) и начальным условиям (7) положим $\tau = X_0$. Решая полученную задачу Коши, находим $\xi_n(x_0, t)$, $\sigma_n(x_0, t) = \pm 1$, $n \in Z$.

Затем из формулы следов (9) определим функцию $q(x_0, t)$. После этого подставляем это в систему уравнение (6) и решая задачу Коши (6), (7) при произвольном значении τ , находим $\xi_n(\tau, t)$, $\sigma_n(\tau, t) = \pm 1$, $n \in Z$. Из формул следов (9) определим $q(\tau, t)$. После этого легко найти решение Флоке $\psi(x, \lambda, t)$ уравнения $L(\tau, t)y = \lambda y$.

Следствие 3. Используя результаты работы [15]-[18] выводим, что если начальная функция $q_0(x)$ является действительной аналитической функцией, то решение $q(x, t)$ является действительной аналитической функцией по X .

Следствие 4. Если число $\frac{\pi}{2}$ является периодом (антипериодом) для начальной функции $q_0(x)$, то все корни уравнения $\Delta(\lambda) + 2 = 0$ ($\Delta(\lambda) - 2 = 0$) являются двукратными. Так как функция Ляпунова, соответствующая коэффициенту $q(x, t)$, совпадает с $\Delta(\lambda)$, то по аналогу обратной теореме Борга (см. [14]-[19]) число $\frac{\pi}{2}$ является также периодом (антипериодом) для решения $q(x, t)$, по переменной X .

Замечание 1. Покажем равномерную сходимость ряда участвующего в уравнение (1). Для этого воспользуемся тождеством

$$s_1(\pi, \lambda_k, t) [\psi_1(\tau, \lambda_k, t)^2 - \psi_2(\tau, \lambda_k, t)^2] = \quad (11)$$

$$= s_1(\pi, \lambda_k, \tau, t) + c_2(\pi, \lambda_k, \tau, t), \quad \Delta^2(\lambda_k) = 4.$$

Из асимптотических формул для решений $c(x, \lambda, \tau, t)$ и $s(x, \lambda, \tau, t)$ следует оценки

$$s_1(\pi, \lambda_k, \tau, t) + c_2(\pi, \lambda_k, \tau, t) = O\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \rightarrow \infty$$

Это оценка и равенство (11), а также условия

$$\alpha_k(t) = O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \rightarrow \infty$$

обеспечивают равномерную сходимость ряда участвующего в уравнение (1).

Литература

1. Итс А.Р., Матвеев В.Б. Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N-солитонные решения уравнения Кортевега-де Фриза. // ТМФ, 23:1(1975), 51-68-б.
2. Дубровин Б.А., Новиков С.П. Периодический и условно периодический аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега-де Фриза. // ЖЭТФ, 67:12 1974, 2131-2143.
3. Итс А.Р. Обращение гиперэллиптических интегралов и интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений. // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. Матем. Механ. Астрон., 7: 2 1976, -С.39-46.
4. Итс А.Р., Котляров В.П. Явные формулы для решений нелинейного уравнения Шредингера. // Докл. АН УССР. сер.А., 1976, №11.
5. Смирнов А.О. Эллиптические решения нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза. // Матем.сб., 185:8 1994, -С.103-114.
6. Смирнов А.О. Эллиптические по t решения нелинейного уравнения Шредингера // ТМФ. 107:2 1996, -С.188-200.
7. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения. // Дифф.ур. 19, 1, 1983. -С.86-94.
8. Нахушев А.М. Уравнение математической биологии. -М.: «Высшая школа», 1995.
9. Кожанов А.И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004.
10. Ince E.L. Ordinary differential equations. -New York: «Dover», 1956.
11. Джаков П.Б., Митягин Б.С. Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шредингера и Дирака // УМН, 61:4, 370. 2006, -С.77-182.

12. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. -М.: «Наука», 1988. -С.432.
13. Мисюра Т.В. Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака I, II. // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. -Харьков: 30, 1978, 90-101; 31, 1979, -С.102-109.
14. Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б. Аналог обратной теоремы Г.Борга для оператора Дирака. // Узб. матем. журн., 2000, №3-4, -С.40-46.
15. Хасанов А.Б., Ибрагимов А.М. Об обратной задаче для оператора Дирака с периодическим потенциалом. // Узб.матем.журн., 2001. №3-4
16. Currie S., Roth T., Watson B. Borg's periodicity theorems for first-order self-adjoint systems with complex potentials. // Proceedings of the Edinburgh mathematical society, 60:3 (2017), 615-633.
17. Станкевич И.В. Об одной задаче спектрального анализа для уравнения Хилла. // ДАН СССР, 192 (1), 1970. 34-37.
18. Trubowitz E. The inverse problem for periodic potentials // Comm. Pure Appl. Math., 30, 1977. 321-337.
19. Borg G. Eine Umkehrung der Sturm-Liouvillschen Eigenwertaufgabe. // Acta Math. - Berlin: 1946. 78, 1-96.

РЕЗЮМЕ

Ушбу мақолада тесқари спектрал масалалар усули юкланган ҳадди ва қатор кўринишдаги манбали модифицирланган Кортевег-де Фриз (мКДФ) тенгламасини чексиз даврий функциялар сифатида интеграллаш учун қаралади.

РЕЗЮМЕ

В статье рассматривается метод обратной спектральной задачи для интегрирования модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза (мКДФ) с нагруженным членом и источником в виде суммы в классе бесконечнозонных периодических функций.

SUMMARY

This paper considers the method of the inverse spectral problem for integrating the modified Korteweg-de Vries equation (mKdV) with a loaded term and a source in the form of a sum in the class of infinite-gap periodic functions.

ФУНКЦИЯНИНГ САТҲ ЧИЗИҚЛАРИ ВА ГРАДИЕНТ ВЕКТОР МАЙДОНЛАР

А.М.Байгураев - физика-математика фанлари номзоди

Ж.О.Аслонов - физика-математика фанлари номзоди

Ўзбекистон миллий университети

Таянч сўзлар: функция, сирт, сатҳ чизиғи, проекция, кесим, айлана, гиперболла, тўғри чизиқ, эллипс, градиент, вектор майдон, интеграл чизиқ, компонента, базис.

Ключевые слова: функция, поверхность, поверхность уровня, проекция, сечение, окружность, гиперболла, прямая, эллипс, градиент, векторное поле, интегральная линия, компонента, базис.

Key words: function, surface, surfaces level, projection, section, circle, hyperbole, line, ellipse, gradient, vector field, integral line, component, basis.

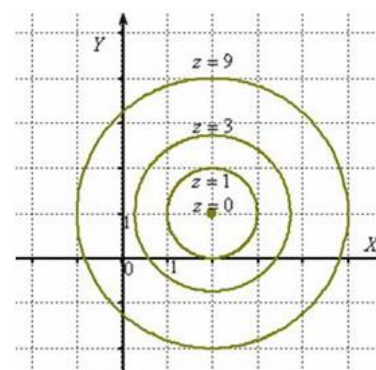
Илм-фан ва техниканинг жадал ривожланиши натижасида математика ва физика фанлари ҳам тез ривожланиши тақозо этилади. Бу эса ўқувчилардан маълум бир кўникмаларга эга бўлишни талаб этади. Маълумки, вектор майдонлар ва уларнинг хоссаларини ўрганиш физик ҳодиса ва жараёнларнинг математик моделларини ўрганишда қулайлик туғдиради. Жумладан, Киллинг вектор майдонларини ўрганиш классик физика объектларидан бири бўлган гравитацион майдонда мавжуд энергия, майдон потенциаллари каби катталикларни ўрганиш имконини беради.

Икки ўзгарувчан $z=f(x,y)$ функциянинг графиги аниқланиши соҳасида уч ўлчовли евклид фазосидаги нуқталар тўпламидан иборат бўлади. Аниқлик ва тасаввур қилиш учун бу нуқталар тўпламини сирт деб ҳисоблаймиз. Энди берилган функциянинг сатҳ чизиғи тушунчасини аниқлаймиз. Умуман олганда, сатҳ чизиғи бу сиртнинг турли параллел текисликлар билан кесимларидан иборатдир. Кесимлар $z=C=const$ текисликлар ёрдамида ҳосил қилинади ва $ХОУ$ текислигига проекцияланади.

Таъриф. Берилган $z=f(x,y)$ функциянинг сатҳ чизиғи деб, $ХОУ$ текислигидаги $f(x,y)=C$ тенглик билан аниқланувчи чизиқларга айтилади.

Демак, сатҳ чизиқлари сиртнинг қандай шаклда эканлигини уч ўлчовли фазода функциянинг графигини ясамасдан аниқлашга ёрдам беради. Баъзи мисолларни қараймиз.

1-мисол. Ушбу $z=(x-2)^2+(y-1)^2$ функциянинг сатҳ чизиқларини топинг ва уларни ясанг.



1-расм

Ечиш. Берилган сиртнинг шаклини сатҳ чизиқлари ёрдамида текшираимиз. Қулайлик учун $(x-2)^2+(y-1)^2=z$ кўринишда ёзиб оламиз. Равшанки, Z ўзгарувчи манфий қийматлар қабул қилмайди (квадратлар йиғиндиси бўлгани учун). Демак, сирт юқори ярим фазода жойлашади. Масала шартда Z ўзгарувчининг аниқ қийматлари кўрсатилмаган. Шунинг учун биз Z ўзгарувчининг қийматларини ихтиёрий равишда танлаймиз. $z=0$ текислик билан кесимни қараймиз: $(x-2)^2+(y-1)^2=0$. Бу тенгламанинг ечими (2,1) нуқтадан иборат, яъни $z=0$ да сатҳ чизиғи нуқтадан иборат бўлади. Энди $z=1$ текислик билан кесимини қараймиз: $(x-2)^2+(y-1)^2=1$. Бу ҳолда сатҳ чизиғи маркази (2,1) нуқтада ва радиуси 1 га тенг бўлган айланадан иборат. Эслатиб ўтамиз, ҳамма кесимлар $ХОУ$ текислигига проекцияланади, шунинг учун нуқталарни учта эмас, балки иккита координата билан ёзамиз.

Энди $z=3$ текисликини оламиз ва у билан сиртни кесамиз: бу ҳолда сатҳ чизиғи маркази (2,1) нуқтада ва