

$$p_{cr} = \frac{1}{2\alpha} \quad (22)$$

Качественно этот процесс представлен на рис. 2

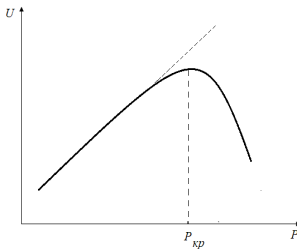


Рис.2. Качественная зависимость изменения скорости рекомбинации от уровня возбуждения в условии

зависимости $c_n(f_2)$ (18), пунктиром показана зависимость $U(p)$, соответствующая формуле (21).

Таким образом, учёт снижения активности парного рекомбинационного комплекса приводит к уменьшению скорости рекомбинации даже в случае, когда на первый взгляд, повторяется результат, одноуровневой статистики Шокли – Рида. Подчеркнем, что даже в случае пренебрежимо малой инерционности, само наличие парного комплекса может приводить к снижению скорости рекомбинации в процесс возбуждения.

Работа выполнена в рамках гранта ФА-Ф2-003 «Фото-, теплоэлектрические и излучательные эффекты в новых многокомпонентных твердых растворах с нанокристаллами на основе молекул элементарных полупроводников и полупроводниковых соединений» АН РУз.

Литература

1. Лейдерман А.Ю., Минбаева М.К. (1996). Механизм быстрого роста прямого тока в полупроводниковых диодных структурах. ФТП, 1996, т. 30, №10, -С. 1729-1738.
2. Лейдерман А.Ю., Хашаев М.М. Особенности рекомбинации в полупроводниках $A^{III}B^V$. ДАН РУз, №3, -С. 22-24, 2012.
3. Leiderman A.Yu. Applied Solar Energy. 2008, vol. 44, №-2, P. 82-86.
4. Лейдерман А.Ю. Новые синергетические эффекты в полупроводниках. Материалы конференции НПО «Физика - Солнце» АН РУз. –Ташкент: 2016. -С. 152-161.
5. Lang D.W. Logan R.A. Phys. Review Letters, 1977, vol. 39, № -10. -P. 635-638.
6. Гринь Е.Ф., Любченко А.В., Сальков Е.А., Шейнкман М.К. Об излучательной рекомбинации через донорно-акцепторные пары в CdS при низких температурах. ФТП, 1975, т. 9, № 2, -С. 303-310.

РЕЗЮМЕ

Активлиги кўзготиш жараёнида пасажуви жуфт рекомбинацион комплексга эга яримўтказгич модели учун номувозанатий ташувчиларнинг рекомбинация тезлиги ҳисоблаб чиқилди. Рекомбинация тезлиги ифодаси Шокли-Рид классик боғлиқлиги билан мос келганда, биринчи сатҳдаги электрон тутилиши коэффицентининг иккинчи тўлдирилган сатҳга боғлиқлиги ҳаттоки кичик инерцияли рекомбинацион жараёнларда ҳам рекомбинация тезлигининг пасайишига олиб келиши кўрсатилган.

РЕЗЮМЕ

В статье рассчитана скорость рекомбинации неравновесных носителей для модели полупроводника с парным рекомбинационным комплексом, активность которого снижается в процессе возбуждения. Показано, что зависимость коэффициента захвата электрона на первый уровень от заполнения второго уровня приводит к убыванию скорости рекомбинации даже в случае малой инерционности процессов рекомбинации, когда выражение для скорости рекомбинации сходно с классической зависимостью Шокли-Рида.

SUMMARY

In the article recombination rate of non-equilibrium carriers is calculated for a semiconductor model with a pair recombination complex, the activity of which decreases during excitation. It is shown that the dependence of the electron capture coefficient on the first level on the filling of the second level leads to a decrease in the recombination rate even in the case of low inertia of the recombination processes, when the expression for the recombination rate is similar to the classical Shockley-Read dependence.

ЭФФЕКТИВНЫЙ СПОСОБ ПОСТРОЕНИЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО КУБИЧЕСКОГО СПЛАЙНА

А.О.Отаров – кандидат физико-математических наук, профессор

Г.А.Гулмирзайева, С.Д.Ражаббайева - студенты

Каракалпакский государственный университет имени Бердаха

Т.М.Таджиев – сотрудник учебной части

Нукусский государственный педагогический институт имени Ажинияза

Таянч сўзлар: сплайн, лахзалар, мойилликлар, параметрлар, даврилиқ, панжара, тугунлар, чегаралар шартлари, усул, баркарор.

Ключевые слова: сплайн, моменты, наклоны, параметры, периодичность, сетка, узлы, краевые условия, метод, устойчивый.

Key words: spline, moments, slopes, parameters, periodicity, grid, nodes, regional conditions, method, stable.

В инженерной практике в автоматизации проектирования на ЭВМ, в конструировании кривых и поверхностей, в обработке и представлении геометрической информации, а также в самой математике – в теории аппроксимации, при численном дифференцировании и интегрировании, численном решении дифференциальных и интегральных уравнений наиболее широкое применение получили интерполяционные кубические сплайны [1,2,3]. Это обусловлено тем, что полином третьей степени является простейшая кривая, имеющая точку перегиба, что обеспечивает её хорошие интерпо-

ляционные возможности. Кубические сплайны имеют на всем отрезке аппроксимации непрерывные производные до второго порядка. Такая гладкость обычно оказывается достаточной для большинства задач. Не высокая степень полинома упрощает вычисления и уменьшает вычислительную погрешность.

В данной работе приведён способ, который позволяет эффективно определить параметры кубического сплайна: коэффициенты и моменты при использовании различных краевых условий.

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$ в узлах сетки $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ значениями $f(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n$. Тогда по определению кубический сплайн $S(x)$ задается формулами [1,3]:

$$S(x) = S_i(x), \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

$$S_i(x) = a_0 + a_1(x - x_i) + a_2(x - x_i)^2 + a_3(x - x_i)^3, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (1)$$

Всего формулы для сплайна содержит $4n$ неизвестных коэффициентов. Выпишем для них уравнения. Из условий интерполяции

$$S_i(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

Из условий дважды непрерывной дифференцируемости выполняется

$$S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1}), i = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1}), i = 0, 1, \dots, n-1$$

Итого $4n - 2$ уравнения. Недостающие для однозначного определения сплайна два уравнения задаются дополнительно в виде ограничений на значения сплайна или его производных на концах отрезка $[a, b]$ в зависимости от физических условий каждой конкретной задачи.

Наиболее часто применяют следующие краевые условия [1.3]:

$$1) \quad S'(a) = f'(a), \quad S'(b) = f'(b);$$

$$2) \quad S''(a) = f''(a), \quad S''(b) = f''(b);$$

$$3) \quad S'(a) = S'(b), \quad S''(a) = S''(b) \text{ — условие периодичности;}$$

$$4) \quad \left. \begin{aligned} S'''(x_1 - 0) &= S'''(x_1 + 0), \\ S'''(x_{n-1} - 0) &= S'''(x_{n-1} + 0) \end{aligned} \right\} \text{ дополнительные условия непрерывности в первом и предпоследнем узлах}$$

сетки.

Краевые условия 3) применяют для интерполяции периодических функций периода $T = b - a$. Кубический сплайн, удовлетворяющий краевым условиям 2), где $f'(a) = 0$ и $f'(b) = 0$ (нулевая кривизна), называется естественным [1.3].

Рассмотрим алгоритмы вычисления параметров кубического сплайна (1) при краевых условиях 1) – 4). Введем обозначения:

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \quad M_i = S''(x_i), \quad m_i = S'(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Величины M_i и m_i называют моментами и наклонами сплайна в узле x_i соответственно.

Так как $S(x)$ – кубическая функция, то $S''(x)$ будет линейной относительно x функцией на каждом частичном отрезке. Поэтому при $x \in [x_i, x_{i+1}]$ по формуле линейной интерполяции [2] запишем выражение для второй производной сплайна в виде

$$S''(x) = S''(x_i) + \frac{S''(x_{i+1}) - S''(x_i)}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i)$$

или через моменты

$$S''(x) = M_i + \frac{M_{i+1} - M_i}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i) \quad (2)$$

Проинтегрируем дважды равенство (2):

$$S'(x) = S'(x_i) + M_i(x - x_i) + \frac{M_{i+1} - M_i}{2h_i} (x - x_i)^2, \quad (3)$$

$$S(x) = y_i + S'(x_i)(x - x_i) + \frac{M_i}{2} (x - x_i)^2 + \frac{M_{i+1} - M_i}{6h_i} (x - x_i)^3 \quad (4)$$

Полагая в последнем равенстве $x = x_{i+1}$, имеем:

$$y_{i+1} = y_i + S'(x_i)h_i + \frac{M_i}{2} h_i^2 + \frac{M_{i+1} - M_i}{6} h_i^3$$

Отсюда

$$S'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6} (2M_i + M_{i+1})$$

Подставив значение $S'(x_i)$ в формулы (3) и (4), приходим к формулам:

$$S(x) = y_i + \left[\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6} (2M_i + M_{i+1}) \right] (x - x_i) + \frac{M_i}{2} (x - x_i)^2 + \frac{M_{i+1} - M_i}{6h_i} (x - x_i)^3, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (5)$$

$$S'(x) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6} (2M_i + M_{i+1}) + M_i(x - x_i) + \frac{M_{i+1} - M_i}{2h_i} (x - x_i)^2,$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (6)$$

Формулы (5) и (6) выражают интерполяционный кубический сплайн и его производную на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ через значения функции $f(x)$ в узлах и моменты M_i, M_{i+1} .

Учитывая равенства (1) и (5), запишем выражения для параметров сплайна в кусочно-полиномиальном представлении

$$\begin{cases} a_{i0} = y_i, & a_{i1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6} (2M_i + M_{i+1}), \\ a_{i2} = \frac{M_i}{2}, & a_{i3} = \frac{M_{i+1} - M_i}{6h_i}, \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (7)$$

Для определения моментов M_i, M_{i+1} воспользуемся свойством непрерывности первой производной $S'(x)$ в узлах сплайна. Заменим в (6) индекс i на $i-1$, получим выражение $S'(x)$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$:

$$S'(x) = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1}}{6} (2M_{i-1} + M_i) + M_{i-1}(x - x_{i-1}) + \frac{M_i - M_{i-1}}{2h_{i-1}} (x - x_{i-1})^2 \quad (8)$$

Из равенств $S'(x_i - 0) = S'(x_i + 0)$ следует:

$$h_{i-1}M_{i-2} + 2(h_i + h_{i-1})M_i + h_iM_{i+1} = \frac{6(y_{i+1} - y_i)}{h_i} - \frac{6(y_i - y_{i-1})}{h_{i-1}},$$

$$i = 0, 1, \dots, n-1$$

Последнее равенство представим в виде

$$\alpha_i M_{i-1} + 2M_i + \beta_i M_{i+1} = d_i \quad (9)$$

где

$$\alpha_i = \frac{h_{i-1}}{h_i + h_{i-1}}, \quad \beta_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i-1}} = 1 - \alpha_i, \quad d_i = \frac{6}{h_i + h_{i-1}} \left[\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \right] = 6f'(x_{i-1/2}; x_i; x_{i+1/2}),$$

$$i = 0, 1, \dots, n-1$$

Для определения моментов M_i во всех узлах $x_i (i = 0, 1, \dots, n)$ прибавим к (9) еще два уравнения, вытекающие из соответствующих краевых условий:

$$1. \quad 2M_0 + M_1 = d_0, \quad d_0 = \frac{6}{h_0} (y_1 - y_0 - f'(a)),$$

$$M_{n-1} + 2M_n = d_n, \quad d_n = \frac{6}{h_{n-1}} (f'(b) - y_n - y_{n-1}); \quad (11)$$

$$2. \quad M_0 = f'(a), \quad M_n = f'(b); \quad (12)$$

$$3. \quad 2M_1 + \beta_1 M_2 + \alpha_1 M_n = d_1,$$

$$\beta_n M_1 + \alpha_n M_{n-1} + 2M_n = d_n,$$

$$M_0 = M_n; \quad (13)$$

$$4. \quad (1 + \beta_1)M_1 + (\beta_1 - \alpha_1)M_2 = \beta_1 \alpha_1,$$

$$(\alpha_{n-1} - \beta_{n-1})M_{n-1} + (1 + \alpha_{n-1})M_{n-2} = \alpha_{n-1} d_{n-1},$$

$$M_0 = \beta_1^{-1}(M_1 - \alpha_1 M_2), \quad M_n = \alpha_{n-1}^{-1}(M_{n-1} - \beta_{n-1} M_{n-2}), \quad (14)$$

в (9) полагаем $i = 2, 3, \dots, n-2$.

В случае краевых условий 3) и 4) преобразованы первое и последнее уравнение системы и из них исключены M_0 и M_n . В результате получены системы линейных алгебраических уравнений, у каждой из которых матрица имеет доминирующую главную диагональ. Такая матрица будет невырожденной [2], поэтому система (9), дополненная соответственно уравнениями (11) - (14), имеет единственное решение. Это условие свидетельствует также о существовании и единственности интерполяционного кубического сплайна.

Таким образом, задача построения интерполяционного кубического сплайна сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, что можно эффективно осуществить методом прогонки. Для матрицы с диагональным преобладанием метод прогонки устойчив относительно ошибок округления [1,2,3].

Если моменты $M_i, i = 0, 1, \dots, n$ во всех узлах вычислены, то кубический сплайн на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}], i = 0, 1, \dots, n-1$ представляется в виде (5) или (1). Выражение (5) для сплайна можно преобразовать к более симметричному виду

$$S(x) = (1 - t)y_i + ty_{i+1} - \frac{h_i^2}{6} t(1-t)[(2-t)M_i + (1+t)M_{i+1}],$$

$$t = (x - x_i)/h_i, x \in [x_i, x_{i+1}], i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (15)$$

Для вычисления значения кубического сплайна в точке $x \in [a, b]$ можно воспользоваться формулой (1) и схемой Горнера

$$S(x) = (a_{i3}(x - x_i) + a_{i2}(x - x_i) + a_{i1})(x - x_i) + a_{i0} \quad (16)$$

Коэффициенты $a_{ij} (j = 0, 1, 2, 3)$ согласно (7) удобно вычислять по схеме

$$a_{i0} = y_i, \quad a_{i2} = M_i/2, \quad a_{i3} = (M_{i+1} - M_i)/6h_i,$$

$$a_{i1} = (y_{i+1} - y_i)h_i - h_i(a_{i2} + a_{i3}h_i) \quad (17)$$

Предварительно следует определить отрезок $[x_i, x_{i+1}]$, которому принадлежит значение аргумента.

В заключении отметим, что аналогичным способом можно представить интерполяционный кубический сплайн через наклоны $m_i = S'(x_i), i = 0, n$

Литература

1. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошников В.Л. Методы сплайн-функций. – М.: «Наука», 1980.
2. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: «Наука», 1978.
3. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. – М.: «Наука», 1976.

РЕЗЮМЕ

Маколада интерполятсия кубик чизигини яратишнинг самарали усули келтирилган. Сплайн коэффициентларини унинг моментлари нуктаи назаридан ифода этадиган формулалар олинган. Сплайннинг моментларини аниқлаш муаммоси эсим тизимларида камайтирилади. Тридиагонал матрица билан чизикли алгебраик тенгламалар. У ҳар доим ноёб эчимга эга ва уни тозалаш хатолиғига нисбатан барқарор бўлган супуриш усуллари билан самарали ҳал қилиш мумкин.

РЕЗЮМЕ

В статье приведён эффективный способ построения интерполяционного кубического сплайна. Выведены формулы, выражающие коэффициенты сплайна через его моменты. Задача определения моментов сплайна сводится к решению систем. Линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. Она всегда имеет единственное решение и её можно эффективно решить методом прогонки, который устойчив относительно погрешностей вычислений.

SUMMARY

The article provides an effective ways of building an interpolator cubic spline. Formulas are derived that express of the spline coefficient through its moments. The problem of determining the moments of a spline is reduced to solving a system of linear algebraic equations with a tridiagonal matrix. It always has a unique solution and it can be effectively solved by the run method, which is stable with relative calculation errors.