

SHEGARALANĖAN FUNKCIYALARDAN PAYDALANÍP TEŇSIZLIKLERDI SHESHIW USÍLLARÍ

N.Djumabaev - *úlkén oqıtwshı*

Ájiniyaz atındaǵı Nókis mámleketlik pedagogikalıq institutı

Tayanch sózlar: shegaralangan funksiya, Koshi teŇsizligi, tenglamalar sistemaları.

Ключевые слова: ограничение функции, неравенство Коши, системы уравнения.

Key words: bounded functions, the Cauchy inequality, the systems of equations.

Shegaralangan funksiyaardıń qásiyetlerinen paydalanıp ayırım standart usıllar menen sheshilmeytuǵın qıyın teŇsizliklerdi ańsat sheshiwge boladı. Usınday qıyın teŇsizliklerdi shegaralangan funksiyaardıń qásiyetinen paydalanıp sheshiwdi qarap ótemiz:

1-mısal. $\sqrt{1-x^2} < \sqrt[8]{5-x}$ teŇsizligin sheshiń.

Sheshiw. TeŇsizliktiń múmkin mánisleriniń oblastın tabamız:

$$\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1 \leq 0 \\ x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x-1) \leq 0 \\ x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

Berilgen teŇsizliktiń múmkin mánisleriniń oblastında berilgen teŇsizliktiń sol jaǵı $\sqrt{1-x^2} \leq 1$ hám oń jaǵı $\sqrt[8]{4} \leq \sqrt[8]{5-x} \leq \sqrt[8]{6}$ jáne $1 < \sqrt[8]{4}$ bolǵanlıqtan, berilgen teŇsizliktiń sheshimleri $-1 \leq x \leq 1$ aralıǵındaǵı barlıq sanlar kópligi boladı.

Juwabı: $x \in [-1; 1]$.

2-mısal. TeŇsizligin sheshiń

$$\sqrt{3+\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}} < \sqrt[3]{9-x^2-\frac{1}{x^2+1}}$$

Sheshiw. $a + \frac{1}{a} \geq 2$ túrindegi Koshi teŇsizliginen paydalanıp,

berilgen teŇsizliktiń sol jaǵındaǵı koren astındaǵı ańlatpamı tómendegishe jazamız:

$$\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$$

sonda berilgen teŇsizliktiń sol jaǵı tómennen tómendegishe shegaralanadı:

$$\sqrt{3+\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}} \geq \sqrt{3+2} = \sqrt{5}$$

Berilgen teŇsizliktiń oń jaǵın tómendegishe jazamız:

$$\sqrt[3]{9-x^2-\frac{1}{x^2+1}} = \sqrt[3]{10-\left(x^2+1+\frac{1}{x^2+1}\right)}$$

Koshi teŇsizligin teŇsizliktiń oń jaǵına da paydalansaq, onda

$$\sqrt[3]{9-x^2-\frac{1}{x^2+1}} = \sqrt[3]{10-\left(x^2+1+\frac{1}{x^2+1}\right)} \leq \sqrt[3]{10-2} = 2$$

berilgen teŇsizliktiń oń jaǵı joqarıdan shegaralanadı.

Olay bolsa, $\sqrt{5} > 2$ bolǵanlıqtan berilgen teŇsizlik sheshimge iye bolmaydı.

Juwabı: $x \in \emptyset$.

3-mısal. TeŇsizlikti sheshiń

$$\log_2(x-1) - \log_2(x+1) + \log_{\frac{x+1}{x-1}} 2 > 0$$

Sheshiw. TeŇsizliktiń múmkin mánisleriniń oblastın tabamız:

$$\begin{cases} x-1 > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$$

Berilgen teŇsizlikti tómendegishe túrlendirip jazamız:

$$\log_2(x-1) - \log_2(x+1) + \log_{\frac{x+1}{x-1}} 2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{x-1}{x+1} + \log_{\frac{x+1}{x-1}} 2 > 0$$

(1)

Bul teŇsizlikten $y = \frac{x+1}{x-1}$ dep belgileymiz.

$y = \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$ bunda $x > 1$ bolsa, $y > 1$ boladı. Bul belgilengenlerdi (1) ge qoysaq:

$$-\log_2 y + \frac{1}{\log_2 y} > 0 \Leftrightarrow -\frac{\log_2^2 y - 1}{\log_2 y} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2^2 y - 1}{\log_2 y} < 0$$

(2)

Bunda, $y > 1$ bolǵanlıqtan, $\log_2 y > 0$ boladı. Olay bolsa, (2) teŇsizlik tómendegi teŇsizlikke teń kúshli boladı:

$$0 < \log_2 y < 1 \Leftrightarrow 1 < y < 2 \Leftrightarrow 1 < 1 + \frac{2}{x-1} < 2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{x-1} < 2 \Leftrightarrow 0 < \frac{2}{x-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{2-x+1}{x-1} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-x}{x-1} < 0 \Leftrightarrow -\frac{x-3}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x-1} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-3) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$$

Juwabı: $x \in (3; +\infty)$.

4-mısal. TeŇsizlikti sheshiń

$$2^{-|x-2|} \cdot \log_2(4x-x^2-2) \geq 1$$

Sheshiw.

$$2^{-|x-2|} \cdot \log_2(4x-x^2-2) \geq 1 \Leftrightarrow \log_2(4x-x^2-2) \geq 2^{|x-2|}$$

Bunnan

$$4x-x^2-2 = 2-x^2+2x-4 = 2-(x^2-2x+4) = 2-(x-2)^2 \leq 2$$

bolǵanlıqtan $\log_2(4x-x^2-2) \leq 1$.

$|x-2| \geq 0$ bolǵanlıqtan, $2^{|x-2|} \geq 2^0 = 1$ boladı. Demek, berilgen teŇsizliktiń sol jaǵınıń joqarı shegarası, berilgen teŇsizliktiń oń jaǵınıń tómengi shegarası bolǵan 1 ge teń. Olay bolsa, tómendegi teńlemeler sisteması orınli boladı:

$$\begin{cases} 2^{|x-2|} = 1 \\ \log_2(4x-x^2-2) = 1 \end{cases}$$

$x = 2$ teńlemeler sistemasınıń sheshimi boladı. Demek, berilgen teŇsizlik te $x = 2$ sheshimine iye boladı.

Juwapı: $x \in \{2\}$.

5-mısal. Teńsizlikti sheshiń

$$(x^2 - 4x + 3) \cdot \log_2 \left(\cos \pi x + \cos x + 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right) \leq -1$$

Sheshiw. Berilgen teńsizlikti tómendegishe jazamız:

$$(x^2 - 4x + 3) \cdot \log_2 \left(\cos \pi x + \cos x + 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right) \leq -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-x^2 + 4x - 3) \cdot \log_2 \left(\cos \pi x + \cos x + 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right) \geq 1$$

Bul teńsizliktiń sol jaǵındaǵı birinshi kóbeyiwshi úsh aǵzalın tómendegishe jazamız:

$$-x^2 + 4x - 3 = 1 - x^2 + 4x - 4 = 1 - (x^2 - 4x + 4) = 1 - (x - 2)^2 \leq 1$$

demek, birinshi kóbeyiwshi úsh aǵzalı joqarıdan 1 menen shegaralanǵan, yaǵnıy $-x^2 + 4x - 3 \leq 1$.

Sonıń menen birge, logarifm astındaǵı ańlatpanı tómendegishe túrlendiremiz:

$$\begin{aligned} \cos \pi x + \cos x + 2 \sin^2 \frac{x}{2} &= \cos \pi x + \\ &+ \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right) + 2 \sin^2 \frac{x}{2} = \cos \pi x + 1 \leq 2 \end{aligned}$$

Olay bolsa, logarifmlik ańlatpada joqarıdan 1 menen shegaralanǵan yaǵnıy $\log_2 \left(\cos \pi x + \cos x + 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right) \leq 1$.

Demek, $-x^2 + 4x - 3 \leq 1$ teńsizliginen tómendegi teńsizlik kelip shıǵadı:

$$(-x^2 + 4x - 3) \cdot \log_2 \left(\cos \pi x + \cos x + 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right) \leq 1$$

$$\text{Bunnan } (-x^2 + 4x - 3) \cdot \log_2 \left(\cos \pi x + \cos x + 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right) \geq 1$$

teńsizligi tómendegi teńlemeler sisteması orınlı bolǵanda ǵana teńlikke aylanatuǵın kelip shıǵadı:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} -x^2 + 4x - 3 = 1 \\ \log_2 \left(\cos \pi x + \cos x + 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 0 \\ \log_2 \left(\cos \pi x + \cos x + 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\begin{cases} (x - 2)^2 = 0 \\ \log_2 \left(\cos \pi x + \cos x + 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\begin{cases} x = 2 \\ \log_2 \left(\cos \pi x + \cos x + 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right) = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$x = 2$ mánisi teńlemeler sistemasınıń ekinshi teńlemesinde qanaatlandıradı. Demek, $x=2$ mánisi berilgen teńsizliktiń sheshimi boladı, yaǵnıy berilgen teńsizlik jalǵız $x=2$ sheshimine iye boladı.

Juwapı: $x \in \{2\}$.

Ádebiyatlar

1. Alixanov S. Matematika o'qitish metodikasi. -Toshkent: «O'qituvchi», 2008, 207- b.
2. Galitskiy M.L., Moshkovich M.M., Shvartsburd S.I. Algebra va matematik analiz kursini chuqur o'rganish. -Toshkent: «O'qituvchi», 1995, 384-b.
3. Abdixamedov A.A., Nasimov N.A, Nosimov I.M., Xusanov J.X. Algebra hám matematikalıq analiz tiykarları. I , II bólim. - Nókis: «Bilim» 2005, 415-b.

РЕЗЮМЕ

Standart emas tensizliklarni yechishda chegaralangan funktsiyalarning xususiyatlaridan foydalanib yechish usullari keltirilgan.

РЕЗЮМЕ

В статье рассматриваются методы решения нестандартных неравенств с помощью использования ограниченностных функций.

SUMMARY

The article describes methods of solving nonstandard inequalities using properties of bounded functions.