

MUKAMMAL, INOQ VA FIBONACHCHI SONLARI: NAZARIY ASOSLARI VA AMALIY AHAMIYATI

Seytmuratov Salamat Tajimuratovich – *pedagogika fanlari bo'yicha falsafa doktori*

s.t.salamat1985@mail.ru

Ajiniyoz nomidagi Nukus davlat pedagogika instituti

СОВЕРШЕННЫЕ, ДРУЖЕСТВЕННЫЕ И ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ: ИХ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ

Сейтмуратов Саламат Тажимуратович – *доктор философии по педагогическим наукам*

Нукусский государственный педагогический институт имени Ажинияза

PERFECT, AMICABLE, AND FIBONACCI NUMBERS: THEORETICAL FOUNDATIONS AND PRACTICAL SIGNIFICANCE

Seytmuratov Salamat Tajimuratovich – *Doctor of Philosophy in Pedagogical Sciences*

Nukus State Pedagogical Institute named after Ajiniyaz

Tayanch soʻzlar: sonlar nazariyasi, mukammal sonlar, inoq sonlar, Fibonachchi sonlari, Evklid–Eyler teoremasi, Mersenn tub sonlari, algoritim, rekurrent ketma-ketlik.

Rezyume. Maqolada sonlar nazariyasining muhim tushunchalari hisoblangan mukammal sonlar, inoq sonlar va Fibonachchi sonlarining matematik taʼriflari, asosiy xossalari, tarixiy rivojlanishi hamda ularning zamonaviy fan va texnologiyadagi ahamiyati tahlil qilingan. Mukammal sonlarni hosil qilishning Evklid–Eyler teoremasi, inoq sonlarning oʻzaro bogʻliqligi va Fibonachchi ketma-ketligining rekurrent xususiyatlari misollar asosida yoritilgan. Shuningdek, mazkur sonlarning kriptografiya, algoritmlar nazariyasi, informatika va tabiatdagi qoʻllanilishiga eʼtibor qaratilgan.

Ключевые слова: теория чисел, совершенные числа, тождественные числа, числа Фибоначчи, теорема Евклида–Эйлера, простые числа Мерсена, алгоритм, рекуррентная последовательность.

Резюме. В статье анализируются математические определения, основные свойства, историческое развитие и значение в современной науке и технологии совершенных чисел, точных чисел и чисел Фибоначчи, являющихся важными понятиями теории чисел. На примерах освещены теорема Евклида–Эйлера о получении совершенных чисел, взаимосвязь равновеликих чисел и рекуррентные свойства последовательности Фибоначчи. Также уделено внимание применению этих чисел в криптографии, теории алгоритмов, информатике и природе.

Key words: number theory, perfect numbers, identity numbers, Fibonacci numbers, Euclid-Eyler theorem, Mersenne prime numbers, algorithm, recursive sequence.

Summary. The article analyzes the mathematical definitions, basic properties, historical development, and significance in modern science and technology of perfect numbers, inhomogeneous numbers, and Fibonacci numbers, which are important concepts in number theory. The Euclidean-Euler theorem for obtaining perfect numbers, the interdependence of consistent numbers, and the recursive properties of the Fibonacci sequence are highlighted based on examples. Attention is also paid to the applications of these numbers in cryptography, the theory of algorithms, informatics, and nature.

Kirish. Sonlar nazariyasi matematikaning eng qadimiy va fundamental sohalaridan biri boʻlib, butun sonlarning xususiyatlari, ularning oʻzaro munosabatlari va qonuniyatlarini oʻrganadi. Qadimgi Misr, Bobil va Yunon olimlari sonlarning turli xossalarni tadqiq etib, keyingi davrlarda matematikaning mustaqil sohasi sifatida shakllangan sonlar nazariyasiga asos solganlar.

Sonlar nazariyasida ayrim sonlar oʻzining alohida xususiyatlari bilan ajralib turadi. Ular qatoriga mukammal sonlar, inoq sonlar va Fibonachchi sonlari kiradi. Ushbu sonlar nafaqat nazariy jihatdan, balki algoritmlar yaratish, kompyuter fanlari, iqtisodiy modellashirish va tabiiy jarayonlarni tadqiq qilishda ham muhim ahamiyat kasb etadi.

Mukammal sonlar oʻzidan tashqari barcha boʻluvchilarining yigʻindisi oʻziga teng boʻlishi bilan ajralib turadi. Inoq sonlar ikki son oʻrtasidagi oʻzaro bogʻliqlikni aks ettirsa, Fibonachchi sonlari esa rekurrent ketma-ketlik sifatida tabiat va texnikada keng uchraydi.

Mazkur maqolaning maqsadi mukammal, inoq va Fibonachchi sonlarining nazariy asoslarini tahlil qilish, ularning asosiy matematik xossalarni yoritish hamda amaliy ahamiyatini koʻrsatishdan iborat.

Asosiy qism. Mukammal sonlar.

Tarixdan maʼlum Pifagor maktabi mukammal sonlar bilan shugʻullangan. Mukammal son deb oʻzidan tashqari

barcha musbat boʻluvchilari yigʻindisi oʻziga teng boʻlgan musbat butun songa aytiladi. Masalan, $6=1+2+3$, $28=1+2+4+7+14$. Pifagordan soʻng yashagan Evklid oʻzining «Negizlar» nomli asarida (VII- kitob) ungacha mukammal sonlar toʻrtga boʻlganini yozadi: 6; 28; 496; 8128.

Evklid $2^{n+1}-1$ -koʻrinishdagi son tub son bolsa, $2^n(2^{n+1}-1)$ koʻrinishdagi son mukammal son bolishini isbotlagan [1].

L.Eyler esa bu sonlar bilan shugʻullanib $2^n(2^{n+1}-1)$ koʻrinishdagi mukammal sonlar juft son ekanini isbotladi [1].

Misol:

$$(n=5): 2^5-1=31$$

Koʻrib turganimizdek 31 tub son.

Demak,

$$N = 2^4(2^5-1) = 16 \cdot 31 = 496$$

496 mukammal son hisoblanadi.

Eylerdan soʻng ham mukammal sonlarga qiziquvchilar koʻp boʻlgan. Hozirgi kunda mukammal sonlardan 24 tasi aniqlangan.

24-mukammal son 1978-yili elektron hisoblash mashinasida topilgan. Mashina uni hisoblashga 40 daqiqa vaqt sarflagan. Uning umumiy koʻrinishi quyidagicha:

$$2^{19136} (2^{19137} - 1)$$

Bu sonning raqamlarini yozish uchun 228 kilometrli qog'oz lenta sarflangan ekan [2].

Inoq sonlar.

Inoq sonlar deb, agar ikki sondan birining bo'luvchilarining yig'indisi (unga sonning o'zi kirmaydi) ikkinchi songa, ikkinchi son bo'luvchilarning yig'indisi (bunda ham sonning o'zi kirmaydi) birinchi songa teng bo'lsa, bu sonlar inoq sonlar deb aytiladi, masalan, 220 bilan 284.

220 ning bo'luvchilarining yig'indisi:

$$1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284.$$

284ning bo'luvchilarining yig'indisi:

$$1+2+4+71+142=220.$$

Keyinchalik inoq sonlar masalasi bilan juda ko'p yirik matematiklar shug'ullanishgan Jumladan, Ferma (1601-1665), Dekart (1596-1650), Eyler (1707-1783).

Ikkinchi juft inoq sonlarni Ferma topgan 17 296 va 18 416. Uchinchi juftini esa Dekart aniqlagan: 9 363 584 va 9 437 056. 1867-yili 16 yoshli N.Paganini (mashhur skripkachi Paganining otdoshi) Ferma va Dekartdek buyuk matematiklar sezmay qolgan bir juft inoq sonni topgan: 1184 bilan 1210. Inoq sonlar masalasiga qiziquvchilar hozir ham ko'p. Shu kungacha topilgan inoq sonlar jufti 600 ga yaqin [1].

Fibonachchi sonlari

Fibonachchi ketma-ketligining asosiy xossalari.

Matematikada Fibonachchi ketma-ketligi har bir element o'zidan oldingi ikkita elementning yig'indisidan iborat bo'lgan ketma-ketlikdir. Fibonachchi ketma-ketligining bir qismi bo'lgan raqamlar Fibonachchi raqamlari sifatida tanilgan, odatda F_n bilan belgilanadi.

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2, \quad F_0 = 0, \quad F_1 = 1$$

Dastlabki hadlar quyidagicha:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \dots$$

Bu ketma-ketlikning muhim xususiyati shundaki, har bir yangi son avvalgi ikki sonning yig'indisidan hosil bo'ladi. Shu sababli u rekurrent ketma-ketliklarning eng sodda va mashhur namunasi hisoblanadi.

Fibonachchi sonlarining birinchi 14 tasi fibonachchi-ning 1228-yildagi qo'lyozmasida keltirilgan. Fibonachchi sonlari uzluksiz kasrlar nazariyasida, hisoblash matematikasida keng tatbiq etiladi [4].

Fibonacci sonlari quyidagicha ta'riflanadi: "Avvalgi ikki elementi 1 ga teng bo'lib, 3-elementidan boshlab, har bir element o'zidan oldingi 2 element yig'indisiga teng" qonuniyati asosida tuzilgan ketma-ketlikka Fibonacci ketma-ketligi, bu sonlarga esa, Fibonacci sonlari deyiladi [3].

Fibonacci sonlari dastlab uning *Liber Abaci* (*Hisob kitobi*, 1202) nomli kitobida paydo bo'lgan. Ushbu kitobda u quyonlar sonini hisoblash uchun bu sonlardan foydalanagan. Fibonachchi (biologik Real bo'lmagan) quyon populyatsiyasining o'sishini ko'rib chiqadi, va taxmin qiladiki: yangi tug'ilgan quyonlar juftligi dalaga qo'yiladi; har bir naslchilik jufti bir oyligida juftlashadi va ikkinchi oyining oxirida ular har doim boshqa juftlik hosil qiladi; va quyonlar hech qachon o'lmaydi, va abadiy naslchilikni davom ettiradi. Fibonachchi oldiga bir jumboqni qo'ydi: bir yilda ushbu quyonlar nechta juft bo'ladi?

Quyida Fibonachchi sonlarining ba'zi muhim matematik xossalari keltirilgan:

- har uchinchi Fibonachchi soni juft son bo'ladi;
- har beshinchi Fibonachchi soni 5 ga bo'linadi;
- ikki qo'shni Fibonachchi sonlari o'zaro tub sonlar hisoblanadi;

• katta hadlar uchun qo'shni sonlar nisbati doimiy qiymatga yaqinlashadi.

Ushbu qonuniyatlar sonlar nazariyasida turli teoremlar va algoritmlarni ishlab chiqishda muhim ahamiyat kasb etadi.

Bine formulasi.

Fibonachchi sonlarini rekurrent munosabatdan tashqari to'g'ridan to'g'ri hisoblash ham mumkin. Buning uchun Bine formulasi qo'llaniladi:

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$

bunda

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Bu erda (φ) - **oltin nisbat** deb ataladi. Uning qiymati

$$\varphi \approx 1.6180339887.$$

Bine formulasi Fibonachchi sonlarini katta (n) qiymatlari uchun tez hisoblash imkonini beradi [4].

Oltin nisbat.

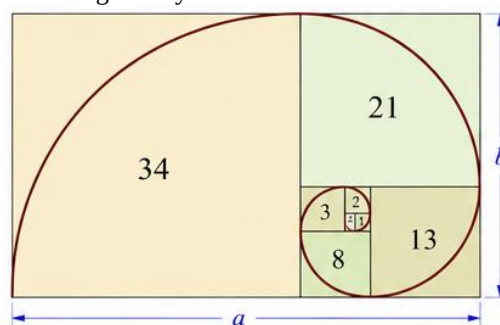
Fibonachchi ketma-ketligining muhim xususiyatlaridan biri qo'shni hadlar nisbatining oltin nisbatga intilishidir.

Masalan,

(F_n)	(F_{n+1})	Нисбат
21	34	1.6190
34	55	1.6176
55	89	1.6182
89	144	1.6180
144	233	1.6181

Jadvaldan ko'rinib turibdiki, $F_{n+1} / F_n \approx 1,6181$

Bu qiymat matematikada, arxitekturada, san'atda va tabiatda keng uchraydi.



Fibonachchi sonlari (oltin nisbat)

Fibonachchi ketma-ketligi tabiatda kungaboqar urug'larining spiral bo'yicha joylashuvi, qarag'ay shishalari, ananas mevasining tashqi tuzilishi, daraxt shoxlarining tarmoqlanishi, ayrim mollusklar qobig'ining spiral shakli kabi ko'plab qonuniyatlarni tushuntirishda muhim ahamiyatga ega.

Bu misollar Fibonachchi ketma-ketligining tabiatdagi simmetriya va optimal joylashuv qonuniyatlari bilan chambarchas bog'liqligini ko'rsatadi.

Zamonaviy ilm-fan va texnikada Fibonachchi sonlari kompyuter algoritmlari, dinamik dasturlash, ma'lumotlarni saralash algoritmlari, iqtisodiy va moliyaviy tahlil, raqamli texnologiyalar kabi sohalarida keng qo'llaniladi.

Muhokama. Mukammal, inoq va Fibonachchi sonlari sonlar nazariyasining o'zaro bog'liq, ammo mustaqil yo'nalishlarini tashkil etadi. Ularning har biri butun sonlarning muayyan xususiyatlarini o'rganishga xizmat qiladi va matematikaning nazariy hamda amaliy masalalarini hal etishda muhim ahamiyat kasb etadi.

Mukammal sonlar bo'luvchilar yig'indisiga asoslanganligi bilan ajralib turadi. Evklid–Eyler teoremasi juft mukammal sonlarning tuzilishini aniq tavsiflab beradi. Biroq, toq mukammal sonlarning mavjud yoki mavjud emasligi hozirgi kunga qadar sonlar nazariyasining echilmagan muammolaridan biri bo'lib qolmoqda.

Inoq sonlar ikki son o'rtasidagi maxsus arifmetik munosabatni ifodalaydi. Bu sonlarni tadqiq qilish bo'luvchilar funksiyalari, arifmetik funksiyalar va algebraik tuzilmalarni chuqurroq o'rganish imkonini beradi. Zamonaviy hisoblash usullari yordamida juda katta inoq sonlar juftliklari aniqlangan bo'lsa-da, ularning taqsimlanish qonuniyatlari to'liq o'rganilmagan.

Fibonachchi sonlari esa rekurrent munosabatlar nazariyasining eng mashhur misoli hisoblanadi. Ushbu ketma-

ketlikning oltin nisbat bilan bog'liqligi nafaqat matematika, balki fizika, biologiya, iqtisodiyot va kompyuter texnologiyalarida ham muhim nazariy va amaliy ahamiyatga ega.

Xulosa. Mukammal, inoq va Fibonachchi sonlari matematikaning eng qiziqarli va dolzarb obyektlari hisoblanadi. Mukammal sonlar bo'luvchilar yig'indisiga asoslangan maxsus sinfni tashkil etsa, inoq sonlar ikki son o'rtasidagi o'zaro arifmetik bog'lanishni ifodalaydi. Fibonachchi sonlari esa rekurrent munosabatlarga asoslangan ketma-ketlik bo'lib, ularning xossalari ko'plab matematik qonuniyatlar bilan uzviy bog'liq.

Tadqiqot natijalari shuni ko'rsatadiki, mazkur sonlar turli matematik obyektlar bo'lishiga qaramasdan, ularning umumiy maqsadi butun sonlarning ichki tuzilishi va qonuniyatlarini o'rganishdan iborat. Ular sonlar nazariyasi, kombinatorika, algoritmlar nazariyasi va amaliy matematikada muhim o'rin egallaydi.

Mukammal sonlar Evklid–Eyler teoremasi orqali aniqlansa, inoq sonlar bo'luvchilar funksiyasi bilan tavsiflanadi. Fibonachchi sonlari esa rekurrent formula va Bine formulasi yordamida hisoblanadi. Shuningdek, Fibonachchi ketma-ketligi oltin nisbat bilan uzviy bog'liq bo'lib, tabiatdagi ko'plab simmetrik jarayonlarni tushuntirishda muhim ahamiyat kasb etadi.

Adabiyotlar

1. Abduraxmonov A., Narmonov A., Narmuratov N. Matematika tarixi. – Toshkent: «Fan va texnologiya», 2016.
2. Чистяков В.Д. Старинные задачи по элементарной математике. – Минск: «Высшая школа», 1978.
3. Rosen K.H. Elementary Number Theory and Its Applications. 6th ed. – Pearson, 2011.
4. Euclid. Elements. Book VII–IX. – New York: Dover Publications, 1956.