

IKKINCHI TARTIBLI AYLANMA SIRTlarda GEODEZIK CHIZIQLAR

A.M.Bayturayev – fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent

Y.M.Kalbaeva – magistrant

O'zbekiston milliy universiteti

Tayanch so'zlar: sirt, nuqta, vektor, geodezik chiziq, urinma, konus, silindr, to'g'ri gelikoid, metrik tenzor, Kristoffel simvoli.

Ключевые слова: поверхность, точка, вектор, геодезическая линия, касательная, конус, цилиндр, прямой геликоид, метрический тензор, символы Кристоффеля.

Key words: surface, point, vector, geodesic curve, tangent plane, cone, cylinder, right helicoid, metric tensor, Christoffel symbols.

Kirish. Maqolada ikkinchi tartibli sirt ustida yotuvchi geodezik chiziqlarning differensial tenglamasini yechish orqali geodezik chiziqlar tenglamasining umumiy ko'rinishini aniqlangan hamda bu geodezik chiziqlarning sirt ustida joylashuvi o'rganilgan.

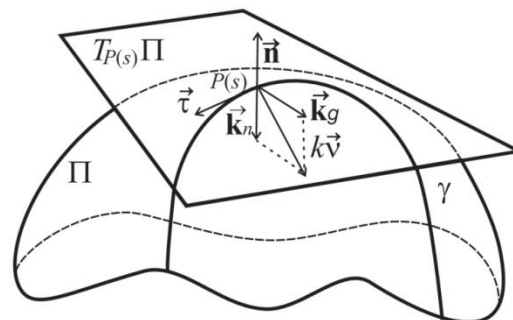
Ilim-fan va texnikaning jadal rivojlanishi natijasida matematika va fizika fanlari ham tez rivojlanishni taqozo etadi. Bu esa o'quvchilardan ma'lum bir ko'nikmalarga ega bo'lishini talab etadi. Talabalar murakkab matematik tushunchalarni o'rganar ekan, ular ketma-ket tahlil qilish va xulosa chiqarishni o'rganadilar. Bu esa umumiy fikrlash qobiliyatini oshiradi. Aylanma sirtlar, geodezik chiziqlar kabi mavzular orqali talabalar fazoviy tasavvurni rivojlantiradi va murakkab modellarni tasavvur qilishni o'rganadilar.

Geodezik chiziqlar sirt bo'ylab harakat qiluvchi jisimlar uchun eng qisqa masofani ta'minlovchi yo'llardir. Masalan, aeronavtika va kosmonavtika sohalarida samolyot va sun'iy yo'ldoshlarning optimal yo'nalishlarini belgilashda geodezik chiziqlar muhim rol o'ynaydi. Bundan tashqari, sirtlarning egri chiziqli koordinatlari, kvadratik formalar va differensial tenglamalar yordamida geodezik chiziqlarni topish muammosi differensial geometriyaning asosiy tadqiqot yo'nalishlaridan biri bo'lib qolmoqda.

Adabiyotlar tahlili. Geodezik chiziqlar va sirtlar differensial geometriya fanining asosiy obyektlaridan hisoblanadi. Tadqiqot mavzusini yoritish uchun quyidagi asosiy adabiyotlar tahlil qilindi: M.A.Sobirov, A.Y.Yusupov. "Differensial geometriya kursi"; N.I.Jukova, A.V.Bagaev "Геодезические линии на поверхностях"; V.F.Kagan. "Основы теории поверхностей: в тензорном изложении". Bu adabiyotlarda klassik uslubda differensial geometriya tushunchalari bayon etilgan. Aylanma sirtlar, ular ustidagi geodezik chiziqlar va ularning ifodalari batafsil keltirilgan.

Natijalar. Aytayik, Π sirt $\vec{r} = \vec{r}(u^1, u^2)$ parametrik tenglama bilan, bu sirt ustida yotuvchi va S tabiiy parametr orqali parametrlangan chiziq $\gamma := \{P(s) \in \Pi \mid \overrightarrow{OP}(s) = \vec{\rho}(s) = \vec{r}(u^1(s), u^2(s)), s \in [0, s_0]\}$ bo'lsin. Bunda $\vec{\tau}(s) = \frac{d\vec{\rho}}{ds}$ vektor γ egri chiziqning $P(s)$ nuqtasidagi egriligi bo'ladi.

Chiziqning istalgan $P(s) \in \gamma$ nuqtadagi $k\vec{v}$ egrilik vektorini biri Π sirtning $\vec{n}(s)$ normal vektoriga parallel, ikkinchisi esa sirtning $P(s)$ nuqtasidagi $T_{P(s)}\Pi$ urinma tekisligiga parallel vektorlarning yig'indisi ko'rinishida yozish mumkin: $k\vec{v} = \vec{k}_g + \vec{k}_n$, bu yerda $\vec{k}_g$ egrilik vektorining $T_{P(s)}\Pi$ urinma tekisligidagi ortogonal proyeksiyasi.



Ta'rif 1 [1]. Ushbu $\vec{k}_g$ vektor egri chiziqning $P(s) \in \gamma$ nuqtasidagi geodezik egrilik vektorini deb ataladi. Geodezik egrilik vektorining uzunligi $|k_g|$ egri chiziqning ushbu nuqtadagi geodezik egriligi deb ataladi.

Shuni ta'kidlash kerakki, ta'rifga ko'ra, har doim $k_g \geq 0$ bo'ladi.

Teorema 1 [1]. Silliqlik $\gamma: u^i = u^i(s)$ egri chiziq Π sirtida S tabiiy parametr yordamida berilgan bo'lsa, u geodezik chiziq bo'lishi uchun $u^i = u^i(s)$ tengkilar quyidagi differensial tenglamaning yechimi bo'lishi zarur va yetarli:

$$\frac{d^2 u^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0. \quad (1)$$

Ta'rif 2. Yuqoridagi teoremda keltirilgan (1) tenglamalar sistemasi ikkinchi tartibli differensial tenglamalardan iborat bo'lib, u Π sirtida geodezik chiziq tenglamasi deb ataladi.

Aylanma sirtning geodezik chiziqlarini topaylik. Uning chiziqli elementi $ds^2 = du^2 + \rho^2 dv^2$, bunda u meridiyan yoyi, V uzoqlik (burchak), ρ esa parallel radiusi bo'lib, u ning tayin funktsiyasidir. Bu erda $g_{11} = 1, g_{12} = 0, g_{22} = \rho^2$. Kristoffelning $\Gamma_{11}^2, \Gamma_{12}^2, \Gamma_{22}^2$, simvollarini tegishli formulalar bo'yicha hisoblash mumkin.

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{\rho_u}{\rho}, \quad \Gamma_{22}^1 = 0.$$

(1) tenglamaga murojaat qilaylik:

$$\frac{d^2 v}{ds^2} + \Gamma_{11}^2 \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2\Gamma_{12}^2 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \Gamma_{22}^2 \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = 0.$$

Bu tenglama ushbu shaklni oladi:

$$\frac{d^2 v}{ds^2} + \frac{2\rho_u}{\rho} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} = 0.$$

Buni integrallash uchun ikki tomonini ρ^2 ga ko'paytiramiz:

$$\rho^2 \frac{d^2 v}{ds^2} + 2\rho\rho_u \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} = 0.$$

Bu vaqtda tenglama quydagi shaklni oladi:

$$\frac{d}{ds} \left(\rho^2 \frac{dv}{ds} \right) = 0,$$

Bu tenglikni integrallab,

$$\rho^2 \frac{dv}{ds} = c_1, \quad c_1 = \text{const}. \quad (2)$$

munosabat hosil qilinadi. (2) tenglama birinchi tartibli differensial tenglama bo'lib, uni integrallash qiyin emas:

$$\rho^2 dv = c_1 ds = c_1 \sqrt{du^2 + \rho^2 dv^2}$$

yoki, ixchamlashtirilgandan keyin,

$$dv = \frac{c_1 du}{\rho \sqrt{\rho^2 - c_1^2}},$$

demak,

$$v = c_1 \int \frac{du}{\rho \sqrt{\rho^2 - c_1^2}} + c_2. \quad (3)$$

Aylanma konusda geodezik chiziqlarni topish.

Aylanma konus quydagi parametrik tenglama bilan berilgan bo'lsin:

$$r(u, v) = \{u \cos v, u \sin v, u\}.$$

Konus yuzasi bo'ylab harakatni aniqlash uchun parametrlar bo'yicha hosilalarni topamiz:

$$r_u = \{\cos v, \sin v, 1\}, \quad r_v = \{-u \sin v, u \cos v, 0\}.$$

Metrik tenzorini hosilalar orqali hisoblaymiz: $g_{uu} = 2$,

$$g_{vv} = u^2, \quad g_{uv} = 0.$$

Demak, metrik tenzor matritsasi quydagicha [2]:

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & u^2 \end{bmatrix}$$

Bundan teskari matritsani topamiz:

$$[g^{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{u^2} \end{bmatrix}.$$

Kristoffel simvollarining umumiy ifodasi

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bundan foydalanib konus uchun Kristoffel simvollarini topamiz: $\Gamma_{vv}^u = 0$;

$$\Gamma_{uu}^u = \Gamma_{uu}^v = \Gamma_{uv}^u = \Gamma_{vv}^v = 0; \quad \Gamma_{uv}^v = \frac{1}{u}; \quad \Gamma_{vv}^u = \frac{u}{2}.$$

Natijada konusning geodezik chizig'ining differensial tenglamasi quydagicha bo'ladi:

$$\frac{d^2 u}{dv^2} = -\frac{u}{2} + \frac{2}{u} \left(\frac{du}{dv} \right)^2. \quad (4)$$

Agar $p = \frac{du}{dv}$ ($p = p(u)$) desak, $\frac{d^2 u}{dv^2} = \frac{dp}{dv} = \frac{dp}{du} \frac{du}{dv} = p \frac{dp}{du}$

bo'ladi, bundan (4) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$p \frac{dp}{du} - \frac{2}{u} p^2 + \frac{u}{2} = 0. \quad (5)$$

Yana yangi $q = p^2$ belgilash kiritamiz, bundan

$$\frac{dq}{du} = 2p \frac{dp}{du}$$

$$\frac{1}{2} \frac{dq}{du} - \frac{2}{u} q + \frac{u}{2} = 0. \quad (6)$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Hosil bo'lgan chiziqli differensial tenglamaning bir jinisli qismini yechamiz:

$$\frac{1}{2} \frac{dq}{du} - \frac{2}{u} q = 0, \quad \frac{1}{2} \frac{dq}{du} = \frac{2}{u} q, \quad \frac{dq}{q} = \frac{4}{u} du,$$

$$\ln|q| = |u|^4 + \ln c_1.$$

Demak, bir jinisli differensial tenglamaning yechimi quyidagicha bo'ladi: $q = c_1 u^4$ (4) differensial tenglamaning

xususiy yechimi sifatida $q = \frac{1}{2} u^2$ olamiz. Shunda (6)

tenglama uchun umumiy yechim $q = c_1 u^4 + \frac{1}{2} u^2$ bo'ladi.

O'zgaruvchilar v, u ga qaytsak quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{du}{dv} = \pm \sqrt{c_1 u^4 + \frac{1}{2} u^2}.$$

$$v = \pm \int \frac{du}{\sqrt{c_1 u^4 + \frac{1}{2} u^2}} + c_2.$$

Silindr ustidagi geodezik chiziqlarni topish. Aylanma silindr quydagi parametrik tenglama bilan berilgan:

$$\vec{r}(u, v) = \{a \cos v, a \sin v, u\}.$$

Geodezik chiziqning differensial tenglamasini silindrda quydagicha yozamiz:

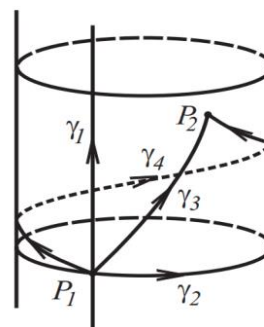
$$\frac{d^2 u}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^2 v}{ds^2} = 0.$$

Bu tenglamalarning umumiy yechimlari quydagicha bo'ladi: $u(s) = c_1 s + c_2, \quad v(s) = c_3 s + c_4$,

bu yerda S geodezik chiziqlarning tabiiy parametri, c_1, c_2, c_3, c_4 - ixtiyoriy son.

Shunday qilib, har qanday geodezik chiziq silindrda quydagi ko'rinishda yozilishi mumkin:

$$\vec{\rho}(s) = \{a \cos(c_1 s + c_2), a \sin(c_1 s + c_2), c_3 s + c_4\}.$$



Agar $c_1 = 0$ bo'lsa,

$$\vec{\rho}(s) = \{a \cos c_2, a \sin c_2, c_3 s + c_4\}$$

bo'ladi, bu silindrning to'g'ri chiziqli yasovchilari bo'ladi.

Agar $c_3 = 0$ bo'lsa, geodezik chiziq quydagicha yoziladi:

$$\vec{\rho}(s) = \{a \cos(c_1 s + c_2), a \sin(c_1 s + c_2), c_3 s + c_4\}.$$

Bu silindrni $z = c_4$ tegisligi bilan kesishishi natijasida hosil bo'lgan aylana bo'ladi.

Agar $c_1 \neq 0, c_3 \neq 0$ bo'lsa,

$$\vec{\rho}(s) = \{a \cos(c_1 s + c_2), a \sin(c_1 s + c_2), c_3 s + c_4\}$$

bu esa silindr yuzasida joylashgan vint chizig'ini ifodalaydi.

Rasimda geodezik chiziqlarning γ_3 va γ_4 bo'laklari ko'rsatilgan bo'lib, ular vint chiziqlari va ular P_1 nuqtasini P_2 nuqtasi bilan bog'laydi.

To'g'ri gelikoiddagi geodezik chiziqlar. To'g'ri gelikoidning tenglamasini $\vec{r}(u, v) = \{u \cos v, u \sin v, hv\}$ kabi yozib, undagi geodezik chiziqlarni topamiz.

Buning uchun sirtning birinchi kvadratik formasining matritsasi (g_{ij}) va unga tekari matritsani (g^{ij}) hisoblaymiz:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + h^2 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{u^2 + h^2} \end{pmatrix}.$$

Ikkinchi turdagi Kristoffel belgilarini topamiz:

$$(\Gamma_{ij}^1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -u \end{pmatrix}, \quad (\Gamma_{ij}^2) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{u}{u^2 + h^2} \\ \frac{u}{u^2 + h^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Koordinata chiziqlari $v = \text{const}$ to'g'ri chiziqlar gelikoidning geodezik chiziqlari bo'ladi. Haqiqatan ham, (2) differensial tenglama quyidagi shaklda yoziladi:

$$\frac{d^2 u}{dv^2} = -u + \frac{2u}{u^2 + h^2} \left(\frac{du}{dv} \right)^2. \quad (3)$$

Keling $p = \frac{du}{dv}$ kabi almashtirish bajaramiz, $p = p(u)$

deb hisoblaymiz va $\frac{d^2 u}{dv^2} = \frac{d}{dv} p = \frac{dp}{du} \frac{du}{dv} = p \frac{dp}{du}$ bo'lishini hisobga olsak, (3) tenglama quyidagi ko'rinishi oladi:

$$p \frac{dp}{du} - \frac{2u}{u^2 + h^2} p^2 - u = 0. \quad (4)$$

Agar $q = p^2$ desak, unda $\frac{dq}{du} = 2p \frac{dp}{du}$ bo'ladi, (4)

tenglama quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\frac{1}{2} \frac{dq}{du} - \frac{2u}{u^2 + h^2} q - u = 0. \quad (5)$$

Bir jinisli $\frac{1}{2} \frac{dq}{du} - \frac{2u}{u^2 + h^2} q = 0$ tenglamani yechamiz,

$\frac{dq}{q} = \frac{4u}{u^2 + h^2} du$ va $\ln|q| = 2 \ln(u^2 + h^2) + \ln C_1$. Bir jinisli

tenglamaning umumiy yechimini yozamiz. Bir jinisli (5) tenglamaning maxsus yechimi sifatida $q = -(u^2 + h^2)^2$ ni

olamiz. U holda $q = C_1(u^2 + h^2)^2 - (u^2 + h^2)$ (5)

tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi. Agar yana dastlabki u, v o'zgaruvchilarga qaytsak

$\frac{du}{dv} = \pm \sqrt{(u^2 + v^2)(C_1(u^2 + v^2) - 1)}$ tenglik hosil bo'ladi.

Shuning uchun

$$v = \pm \int \frac{du}{\sqrt{(u^2 + h^2)(C_1(u^2 + h^2) - 1)}} + C_2 \equiv F(u, C_1, C_2),$$

bu yerda C_1 va C_2 ixtiyoriy o'zgarimas sonlar va $C_1 > \frac{1}{h^2}$.

Demak, ushbu $v = C_0 = \text{const}$ va $v = F(u, C_1, C_2)$,

$C_1 > \frac{1}{h^2}$ chiziqlar to'g'ri gelikoidning geodezik chiziqlari bo'ladi.

Muhokama. Tadqiqotning asosiy masalalari sirtlar geometriyasiga asoslangan holda geodezik chiziqlarni topish. Geodezik chiziqlarning ikkinchi tartibli sirtlardagi harakatiga ta'sir qiluvchi omillarini aniqlash. Uchbu maqolada aylanma sirtlardagi geodezik chiziqlarni differensial tenglamalar orqali aniqlanadi. Geodezik chiziqlarning yo'nalishi va shakli sirtning metrik xususiyatlariga bog'liq holda o'zgarishi o'rganildi.

Xulosa. Maqolada aylanma sirtlarda geodezik chiziqlar differensial tenglamalarning yechimlari sifatida topildi. Bu nafaqat geodezik chiziqlarni aniqlash, balki ularning umumiy geometriyadagi o'rni va xoslarini tushinishga yordam beradi.

Aylanma sirtlarda geodezik chiziqlarning tadqiqi, amaliy sohalarida muhim ahamiyatga ega bo'ladi. Geodezik chiziqlarni aniqlash va ularning sirtlar bilan bog'lanishini tushunish, aeronavtika, kosmonavtika va boshqa transport tizimlarida qo'llanilishi mumkin. Undan tashqari geodezik chiziqlarning nazariy xususiyatlarini amaliyotga qo'llash, masalan, qurilishda, dizaynda va arxitektura ishlarida to'g'ri chiziqlarni aniqlash uchun zarurdir.

Adabiyotlar

1. Жукова Н.И., Багаев А.Б. Геодезические линии на поверхностях. Учебно-методическое пособие. – Н.Новгород: Изд-во. Нижегородской госуниверситет, 2008.

2. Sobirov M.A., Yusupov A.Y. Differensial geometriya kursi. – Toshkent: «O'qituvchi», 1965.

REZYUME. Maqolada ikkinchi tartibli sirt ustida yotuvchi geodezik chiziqlarning differensial tenglamasini yechish orqali geodezik chiziqlar tenglamasining umumiy ko'rinishi aniqlangan hamda bu geodezik chiziqlarning sirt ustida joylashuvi o'rganilgan.

РЕЗЮМЕ. В статье определяется общий вид уравнения геодезических путем решения дифференциального уравнения геодезических, лежащих на поверхности второго порядка, и изучается расположение этих геодезических на поверхности.

SUMMARY. The article determines the general form of the equation of geodesics by solving the differential equation of geodesics lying on a second-order surface and studies the location of these geodesics on the surface.