

КОНУС ШАКЛИДАГИ РАДОН АЛМАШТИРИШИГА УМУМИЙ НАЗАР

Г.Ш.Мамутова – педагогика фанлари бўйича фалсафа доктори, доцент

Ажиниёз номидаги Нукус давлат педагогика институти

Таянч сўзлар: радон алмаштиришлари, интеграл тенгламалар, томографик усуллар, алгоритмлар, Абель алмаштириши, синтетик апертурали радиолокация.

Ключевые слова: радоновые преобразования, интегральные уравнения, томографические методы, алгоритмы, абелевы замещения, синтетическая апертурная радиолокация.

Key words: radon substitutions, Integral Equations, tomographic methods, algorithms, Abel substitutions, synthetic aperture radiolocation.

Кириш қисми. Конус шаклидаги Радон алмаштиришлари классик Радон алмаштиришининг умумлаштирилиши бўлган интеграл алмаштиришлар синфини ташкил этади. Стандарт ҳолатдаги каби гипертекисликлар бўйича интеграллаш ўрнига, интеграллаш конус шаклидаги сиртлар бўйича амалга оширилади, бу эса маълумотлардаги мураккаб геометрик тузилмаларни қамраб олиш имконини беради. Конус шаклидаги Радон алмаштиришларининг асосий қўлланилишларидан бири томография ҳисобланади, айниқса тиклаш керак бўлган объектлар конус шаклидаги ёки радиал симметрияга эга бўлган масалаларда. Масалан, астрономияда улар телескоплардан олинган маълумотларни таҳлил қилиш учун, тиббий визуализацияда эса қон томирлари ёки бошқа найсимон тузилмаларнинг тасвирларини қайта қуриш учун ишлатилиши мумкин [1].

Тахлилий қисми. Математик жиҳатдан конус шаклидаги Радон алмаштиришлари интеграл тенгламалар ва тескари томография масалаларини ечиш билан боғлиқ. Ушбу алмаштиришларга асосланган самарали қайта қуриш алгоритмларини ишлаб чиқиш фаол тадқиқот соҳаси бўлиб қолмоқда, чунки аниқлик ва ҳисоблаш самарадорлиги амалий қўлланишлар учун жуда муҳим ҳисобланади. Келгуси тадқиқотлар, эҳтимол, ушбу алмаштиришларни аниқ масалаларга мослаштиришга ва тезроқ ҳамда барқарорроқ қайта қуриш алгоритмларини ишлаб чиқишга қаратилади. Классик Радон алмаштиришидан фарқли ўлароқ, конус шаклидаги аналоглари текширилаётган объектнинг геометриясини эгилувчан тарзда ҳисобга олиш имконини беради. Интеграллашнинг аниқ конус шаклидаги сиртини танлаш масалага ва объект шакли ҳақидаги априор билимларга боғлиқ. Бу эса аниқ қўлланишларга мослаштирилган ихтисослаштирилган томографик усулларни ишлаб чиқиш имкониятларини очади.

Муҳим жиҳатлардан бири конус шаклидаги Радон алмаштиришларининг маълумотлардаги шовкинга барқарорлигидир. Қайта қуриш жараёнига шовқин таъсирини камайтирадиган регуляризация усулларини ишлаб чиқиш тадқиқотларнинг асосий йўналишидир. Хусусан, қайта қурилган тасвирлар сифатини ошириш учун вейвлет-таҳлил ва бошқа сигналларни қайта ишлаш усулларини қўллаш усуллари ўрганилмоқда.

Конус шаклидаги Радон алмаштиришларининг қўлланилиши фақат томография билан чекланмайди. Улар, шунингдек, конус шаклидаги объектларни ажратиб олиш ва таҳлил қилиш зарур бўлган тасвирларни қайта ишлаш, образларни таниш ва машина ўқитиш масалаларида ҳам қўлланилади. Келажакда конус шаклидаги Радон алмаштиришларини замонавий машина ўқитиш усуллари, масалан, чуқур нейрон тармоқлари билан интеграциялаш мураккаб маълумот-

ларни таҳлил қилиш ва юқори аниқлик ва робастликни талаб қиладиган масалаларни ечиш учун янги, самаралироқ алгоритмларни яратишга олиб келиши мумкин. КРТ бўйича биринчи ишлар унинг математик хоссалари ва тескари бўлиш шартларига бағишланган эди. КРТнинг бошқа интеграл алмаштиришлар, масалан, Абель алмаштириши ва гиперболалар бўйича Радон алмаштириши билан боғлиқликлари ўрганилди. КРТни сонли амалга ошириш усуллари ва тасвирларни тиклаш алгоритмлари ишлаб чиқилди. Тиббий визуализацияда КРТ суяклар ва бошқа зич тўқималарнинг тасвирларини қайта қуриш учун ишлатилади. Геофизикада КРТ сейсмик маълумотларни таҳлил қилиш ва геологик тузилмаларни аниқлаш учун қўлланилади.

Асосий бўлим. [1] мақолада фазода берилган функцияни интеграллаш очилиш бурчаги ва вертикал симметрия ўқида эга бўлган конуслар оиласи бўйича амалга ошириладиган Радон алмаштиришларининг янги синфи кўриб чиқилади. Бундай алмаштиришлар назарий ва амалий нуктаи назардан, айниқса синтетик апертурали радиолокация (SAR), тиббий ва техник диагностикада, шунингдек, ядро саноатида визуализация билан боғлиқ масалаларда қизиқиш уйғотади. Асосий эътибор кўрсатилган алмаштириш учун аниқ аналитик инверсия формуласини чиқаришга қаратилади, бу эса конуслар бўйича интеграллари бўйича бошланғич функцияни тиклаш имконини беради. Таклиф этилган ёндашувнинг ўзига хос хусусияти унинг барқарорлиги ва интеграллаш конуслари оиласи геометриясига чеклов бўлган ҳолатда қўлланилишидир. Мақолада икки ўлчовли ҳолатда усулнинг сонли билан ечилиши келтирилган ва синтетик маълумотларни қайта ишлашда таклиф этилган инверсиянинг афзалликлари намойиш этилган. Иш қатъий математик таҳлилни амалий алгоритмлар билан уйғунлаштиради, бу эса уни амалий математика соҳаси мутахассислари учун ҳам, визуализация масалалари билан шуғулланаётган муҳандислар учун ҳам долзарб қилади.

[2] мақолада функцияни интеграллаш очик бурчак камровидаги айлана ёйлари бўйича амалга ошириладиган айлана ёйли Радон алмаштиришини (Circular Arc Radon, CAR) ўрганишга бағишланган. Ушбу алмаштириш термоакустик ва фотоакустик томография, ультратовушли ва интраваскуляр визуализация масалалари учун, айниқса, физик чекловлар тўлиқ айлана траекторияларидан фойдаланишга имкон берадиган вазиятларда муҳим аҳамиятга эга. Муаллифлар CAR-алмаштиришини тескарилашнинг самарали сонли алгоритмини ишлаб чиқдилар, бу алгоритм функция ташувчиси маълумот йиғиш доираси ичида ёки ташқарисида тўлиқ жойлашган ҳолатларга мўлжалланган. Алгоритм ёйлар геометриясини аналитик таҳлил қилишга ва интеграл операторни дискретлашнинг ёпик

схемасини куришга асосланган бўлиб, бу эса итерацияларсиз инверсияни амалга ошириш имконини беради. Бу юкори ҳисоблаш самарадорлигини таъминлайди, чунки олдиндан қурилган схема тасвирларни тиклаш учун кўп марта ишлатилиши мумкин. Бундан ташқари, чекланган бурчак камрови натижасида юзага келадиган қайта куриш артефактларини камайтиришга қаратилган модификацияланган сонли алгоритм таклиф этилган. Бундай ёндашув қизиқиш соҳасини қисман қамраб олиш шароитида сифатли тасвирлар олиш муҳим бўлган амалий томография масалаларида CAR-алмаштиришларини қўллаш имкониятларини кенгайтиради.

[3] Мақолада мезоскопик сачраш шароитида кўринарли ёки яқин инфрақизил нурланишни қўллайдиган томографик визуализациянинг янги усули тақдим этилган. Бу режимда тўқималар тўғридан-тўғри кузатишни истисно қилиш учун етарлича кучли ёруғликни сачратади, лекин шу билан бирга йўналтирилган ўтган ва қайтган сигналлар сақланиб қолади. Ёруғлик тарқалишининг математик модели Грин функциясидан фойдаланиб, нурланишнинг кўчиш тенгламасини сачраш тартиблари бўйича ёйишга асосланади. Тескари масала Радон алмаштиришини инверсия қилиш масаласи сифатида шакллантирилади, лекин классик томографиядан фарқли ўлароқ, интеграллар тўғри чизиклар бўйича эмас, балки синиқ нурлар бўйича олинади. Бу эса объект атрофида зондлаш қурилмасини айлантимасдан тескари сочраш конфигурациясида тасвирни қайта куриш имконини беради. Тасвирни тиклашнинг алгебраик алгоритми таклиф этилди ва сонли амалга оширилди, шунингдек, рентген томографиясида қўлланиладиган филтрланган тескари проекция усулига ўхшаш аналитик формула олинди. Усул сонли моделлаштиришда самарадорликни намойиш этди ва биологик тўқималарни ноинвазив диагностика қилиш учун истиқболларни очади.

[4] Мақолада детектланган (сочилмаган) рентген ёки гамма-нурларга қўлланиладиган икки ўлчовли Радон алмаштириши ва унинг вариантларига асосланган томографик визуализациянинг математик принциплари кўриб чиқилади. Муаллифлар уч ўлчовли визуализация учун қўлланилиши мумкин бўлган, Комптоннинг сочилган нурланишига асосланган иккита янги умумлаштиришни тақдим этадилар, улар конус шаклидаги Радон алмаштиришлари деб аталади. Улардан биринчиси коллимацияланган детекторлар билан визуализация принциплари билан боғлиқ, иккинчиси эса Комптон камераси принциплари билан боғлиқ ва маълум шартларда тескари бўлиши мумкин. Ушбу усуллар биомедицинавий визуализация тизимларининг келажакдаги ривожланишида муҳим рол ўйнаши мумкин.

[5] ишда SPECTда визуализация учун Ангер камерасига нисбатан фотонларни ҳисоблаш статистикаси ва энергия ажратиш қобилятини яхшилаш салоҳиятига эга бўлган Комптоннинг сочраш камераси (электрон-коллимацияланган камера сифатида ҳам танилган) кўриб чиқилади. Иккита детектор текислигида Комптоннинг сочраш ҳодисаларини мос равишда аниқлаш орқали фотон манбаининг конус сиртидаги жойлашувини аниқлаш мумкин. Манба тақсимотининг уч ўлчовли реконструкцияси учун янги алгоритмлар зарур.

Муаллифлар чексиз узунликдаги текисликда йиғилган конус сиртига проекцияларнинг тўлиқ тўплами мавжуд бўлганда, реконструкция масаласи нафақат аналитик ечимга эга бўлишини, балки ўлчов ноаниқликлари бўлмаса, ортиқча аниқланган бўлишини кўрсатадилар. Детектор текисликлари орасида перпендикуляр равишда ўтаётган фотонларга асосланган тўғридан-тўғри реконструкциянинг иккита ёндашуви таклиф этилган. Ноаниқликлар бўлмаган шароитларда алгоритмларнинг самарадорлигини намойиш этувчи сонли моделлаштириш натижалари келтирилган, шунингдек, ҳақиқий ўлчов шароитларида бўлиши мумкин бўлган модификациялар муҳокама қилинган.

[6] ишда термоакустик томографияда (шунингдек, фотоакустик ёки отоакустик томография деб ҳам аталади) юзага келадиган математик масалалар, усуллар ва муаммоларнинг умумий кўриниши тақдим этилган. Муаллифлар тасвирларни қайта куришда қўлланиладиган математик моделларни кўриб чиқади-лар ва тасвирлар сифатини яхшилаш, алгоритмларнинг аниқлиги ва усулнинг амалий татбиғи билан боғлиқ долзарб қийинчиликлар ва муаммоларни муҳокама қиладилар. Иш ушбу истиқболли тиббий визуализация соҳасида юзага келадиган масалаларни таҳлил қилиш ва ечиш учун самарали математик ёндашувларни ривожлантиришга қаратилган.

Конус шаклидаги Радон алмаштириши функцияни тўғри чизиклар ёки текисликлар бўйича эмас, балки конус шаклидаги соҳалар бўйича интеграллашни ўз ичига олади. Конус шаклидаги Радон алмаштириши билан боғлиқ асосий муаммолар ва қийинчиликлардан баъзилари қуйидагилардир:

1. Тескарилаш. Асосий муаммолардан бири конус шаклидаги Радон алмаштиришини тескарилашдир. Алмаштирилган маълумотлар бўйича бошланғич функцияни тиклаш математик жиҳатдан мураккаб бўлиши мумкин ва доимо ягона ечимга олиб келмаслиги мумкин.

2. Мавжудлик ва ягоналик: Конус шаклидаги Радон алмаштиришининг инъективлиги (яъни турли хил функциялар турли хил алмаштиришларга олиб келиши) шартларини аниқлаш муҳим назарий муаммодир. Ечимларнинг мавжудлиги ва ягоналиги шартларини тушуниш амалий қўлланишлар учун ҳал қилувчи аҳамиятга эга.

3. Барқарорлик. Тескарилаш жараёнининг барқарорлиги яна бир муаммодир. Маълумотлардаги кичик ўзгаришлар тикланган функцияда катта ўзгаришларга олиб келиши мумкин, бу эса тескарилашни шовкин ва ўлчов хатолигига сезгир қилади.

4. Ҳисоблаш мураккаблиги. Конус шаклидаги Радон алмаштиришини ва унинг тескарисини ҳисоблаш алгоритмлари, айниқса юкори ўлчамларда, ҳисоблаш жиҳатидан талабчан бўлиши мумкин. Катта маълумотлар тўпламларини қайта ишлаш учун самарали сонли усуллар зарур.

5. Регуляризация. Тескари масаланинг ногўғри қўйилиши туфайли кўпинча барқарор ва мазмунли ечимлар олиш учун регуляризация усуллари талаб этилади. Мос регуляризация усуллари ва параметрларини танлаш мураккаб вазифадир.

6. Геометрик интерпретация. Конус шаклидаги Радон алмаштиришининг геометрик хоссаларини ва

унинг бошланғич функция билан боғлиқлигини тушуниш мураккаб бўлиши мумкин. Бу турли хил шакллар ва конусларнинг йўналишлари алмаштиришга қандай таъсир қилишини таҳлил қилишни ўз ичига олади.

7. Қўлланишлар. Конус шаклидаги Радон алмаштиришини ҳақиқий сценарийларда, масалан, тиббий визуализацияда (масалан, конус нурли компьютер томографияси) қўллаш маълумотларни йиғиш, қайта қуриш алгоритмлари ва натижаларни интерпретация қилиш билан боғлиқ қўшимча муаммоларни келтириб чиқаради. Сонли артефактлар: Конус шаклидаги Радон алмаштириши учун сонли алгоритмларни амалга оширишда тикланган тасвирларда натижаларнинг сифати ва аниқлигига таъсир қилиши мумкин бўлган артефактлар пайдо бўлиши мумкин.

8. Кўп ўлчовли умумлаштиришлар. Конус шаклидаги Радон алмаштиришини юқори ўлчамларга кенгайтириш математик формулалашда ҳам, ҳисоблаш амалга оширишда ҳам қўшимча мураккабликларни келтириб чиқаради.

9. Чегара эффектлари. Тескарилаш жараёнида чегара шартлари ва эффектларини қайта ишлаш, айниқса, бошланғич функция узилишга эга бўлганда ёки чекланган соҳада аниқланганда, реконструкцияни мураккаблаштириши мумкин. Ушбу муаммоларни ечиш назарий билимлар, сонли усуллар ва аниқ қўлланишга мослаштирилган амалий мулоҳазаларнинг уйғунлигини талаб қилади.

Хулоса. Радона алмаштиришини ўрганишда сезиларли ютуқларга эришилган бўлса-да, бир қатор очик масалалар ва келгуси тадқиқот йўналишлари мавжуд. Конус шаклидаги Радон алмаштиришини ўрганишда эришилган сезиларли ютуқларга қарамай, тескарилаш алгоритмларини такомиллаштириш, янги регуляризация ёндашувларини излаш, турли функционал фазолардаги хоссаларини чуқур ўрганиш, бошқа интеграл алмаштиришлар билан боғлиқликларини аниқлаш, тез ва аниқ сонли усулларни ишлаб чиқиш, мавжуд усулларни катта ҳажмдаги маълумотлар билан реал вақт режимида ишлашга мослаштириш, кўп ўлчовли умумлаштиришларни тадқиқ қилиш, мураккаброқ сиртлар бўйича алмаштиришларни ўрганиш, чекланган кўриш бурчаги ёки тўлиқ бўлмаган проекциялар мавжуд бўлганда қайта қуриш усулларини ишлаб чиқиш, турли танлаш схемаларининг сифатга таъсирини аниқлаш, чуқур ўқитиш усуллари билан интеграциялаш, тескари алмаштиришни тақсимлаш учун нейрон тармоқларидан фойдаланиш, сигналларни қайта ишлаш ва бошқа соҳаларда янги қўлланилишларини излаш, тескари масаланинг барқарорлик шартларини чуқур ўрганиш, қайта қуриш хатоларини баҳолаш усулларини ишлаб чиқиш, кўп процессорли тизимлар ва график процессорларда фойдаланиш учун алгоритмларни параллеллаштириш имкониятларини ўрганиш ҳамда маълумотларни самарали сақлаш ва қайта ишлаш усулларини ишлаб чиқиш каби бир қатор очик масалалар ва келгуси тадқиқот йўналишлари мавжуд.

Адабиётлар

1. Gouia-Zarrad R. Analytical reconstruction formula for n-dimensional conical Radon transform //Computers & Mathematics with Applications. 2014. Т. 68. №. 9. – P. 1016-1023.
2. Syed T.A., Krishnan V.P., Sivaswamy J. Numerical inversion of circular arc radon transform //IEEE Transactions on Computational Imaging. 2016. Т. 2. №. 4. –P. 540-549.
3. Florescu L., Markel V. A., Schotland J. C. Single-scattering optical tomography: simultaneous reconstruction of scattering and absorption. //Physical Review E Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. 2010. Т. 81. №. 1. – P. 016602.
4. Truong T.T., Nguyen M.K., Zaidi H. The mathematical foundations of 3D Compton scatter emission imaging //International journal of biomedical imaging. – Т.: №. 1. 2007. – P. 092780.
5. Cree M.J., Bones P.J. Towards direct reconstruction from a gamma camera based on Compton scattering. //IEEE transactions on medical imaging. 1994. Т. 13. №. 2. – P. 398-407.
6. Kuchment P., Kunyansky L. Mathematics of photoacoustic and thermoacoustic tomography. //arXiv preprint arXiv:0912.2022. 2009.

РЕЗЮМЕ. Ушбу мақолада конус шаклидаги Радон алмаштиришлари таҳлил қилиниб, уларнинг классик Радон алмаштиришига нисбатан умумлаштирилган шакли сифатида қаралиши асослаб берилган. Конус шаклидаги алмаштиришлар интеграл алмаштиришлар синфига киради ва уларнинг геометрик ва аналитик хусусиятлари кенг ёритилади. Мақолада ушбу алмаштиришларнинг функционал таҳлил ва тасвирлаш назариясидаги аҳамияти, шунингдек, уларнинг инверсия масалалари билан боғлиқ жиҳатлари кўриб чиқилган. Тадқиқот натижалари юқори ўлчамли маълумотларни қайта ишлаш, томография ва бошқа амалий соҳаларда қўлланиш имкониятларини очиб беради.

РЕЗЮМЕ. В статье анализируются конические радоновые замещения и обосновывается их рассмотрение как обобщенной формы по сравнению с классическим радоновым замещением. Конические перестановки относятся к классу интегральных перестановок, и их геометрические и аналитические свойства широко освещаются. В статье рассматривается значение этих перестановок в функциональном анализе и теории представлений, а также их аспекты, связанные с проблемами инверсии. Результаты исследований открывают возможности применения в обработке высоко размерных данных, томографии и других прикладных областях.

SUMMARY. This article analyzes cone-shaped radon substitutions on the basis that they are treated as a generalized form with respect to classical radon substitutions. Cone-shaped substitutions belong to the class of Integral substitutions, and their geometric and analytical properties are widely illuminated. The article examines the importance of these substitutions in functional analysis and imaging theory, as well as their aspects related to inversion issues. The results of the study reveal the possibilities of application in high-dimensional data processing, tomography and other applied fields.