

TÁBIYIY HÁM TEXNIKALÍQ ILIMLER

Fizika-matematika. Texnika. Informatika

YUZA VA HAJMNI HISOBLASH USULLARI HAQIDA

S.X.Abjalilov – fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent

M.H.Arzikulova – magistrant

H.Y.Abdisalomova – magistrant

Navoiy davlat universiteti

Tayanch soʻzlar: kvadrat va kub birlik, invariantlik va additivlik, kvadratlanuvchi figuralar, uchburchak, koʻpburchak.

Ключевые слова: квадратная и кубическая единица, инвариантность и аддитивность, квадратурные фигуры, треугольник, многоугольник.

Key words: square and cubic unit, invariance and additivity, quadrature figures, triangle, polygon.

Matematikada yuza va hajm tushunchasining oʻqitilishi masalasi nazariy va amaliy jihatdan har doim muhim va dolzarb masalalardan biri hisoblanib kelingan. Dunyo amaliyotida ushbu masalalarga ilk marta duch keluvchi oʻquvchilar yuza va hajmni tabiiy ravishda qabul qilishlari uchun ularni sodda usulda kiritilishi va formulalar yordamida hisoblash tajribasini egallash taklif etiladi. Oliy oʻquv yurtlarida bilimlarni yanada mukammal egallash maqsadida yuza va hajmni aksiomatik kiritish hamda ularni sonli miqdor sifatida oʻlchash mumkin ekanligini asoslash masalalari qaraladi [1,2].

Yuza tushunchasi. Dastlab masalani koʻpburchakli figuralar misolida koʻrib oʻtamiz.

Taʼrif. Koʻpburchakli figura deb chekli sondagi uchburchaklardan tashkil topgan figuraga aytiladi.

Koʻpburchakli figura yuzasi uchun quyidagi ikki xossa oʻrinli:

1. Teng figuralar teng yuzaga ega.
2. Agar figura bir necha boʻlaklardan tashkil topgan boʻlsa, u holda uning yuzasi boʻlaklar yuzalari yigʻindisiga teng boʻladi.

Birinchi xossa invariantlikni, yaʼni figura siljirilganida ham yuzaning oʻzgarmasligini taʼminlasa, ikkinchi xossa additivlik xossasi oʻrinli ekanligini koʻrsatadi.

Figura yuzasini biror meyorlar asosida oʻlchanuvchi son sifatida ifodalalsh mumkin. Yaʼni, yuza deb F figurani E birlik figuralar bilan butunlay qoplash mumkin boʻlgan $S(F)$ miqdorga aytiladi. $S(F)$ miqdor uchun quyidagi shartlar oʻrinli:

1. $S(F) > 0$,
2. Agar $F \cong F'$, $S(F) = S(F')$,
3. $S(F_1 + F_2) = S(F_1) + S(F_2)$,
4. $S(E) = 1$.

Bu yerda E - birlik yuza sifatida qabul qilinuvchi figura boʻlib, amalda tomoni 1 birlikka teng kvadrat olinadi.

Yuzani hisoblash boʻyicha mulohaza yuritaylik. F – berilgan figura boʻlsin. Ushbu figurani oʻz ichiga oluvchi G va unga butunlay tegishli boʻlgan H koʻpburchakli figuralar va ularning yuzalarini mos ravishda $S(G)$ va $S(H)$ desak, F figura yuzasi uchun quyidagi munosabat oʻrinli

$$S(H) \leq S(F) \leq S(G).$$

Agar $S(H)$ va $S(G)$ sonlar bir-biridan juda katta miqdorda farq qilsa, u holda $S(F)$ yuza qiymatiga aniqlik kiritishning imkoni boʻlmaydi. Shubhasiz, yuza bir qiymatli aniqlanishi uchun $S(G)$ va $S(H)$ sonlarning farqi cheksiz kichik boʻlishi kerak.

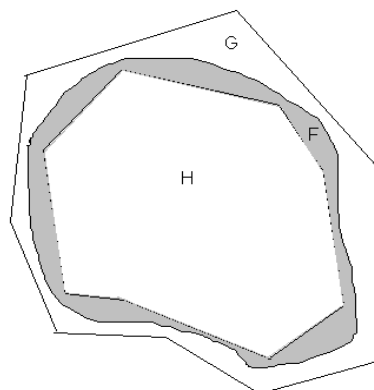
Yuzani aniqlashning sodda tarifini keltiramiz.

Tarif. F figuraning yuzasi deb, bu figurani oʻz ichiga oluvchi koʻpburchakli figura yuzasidan katta boʻlmagan va

F figura oʻz ichiga olgan figura yuzasidan kichik boʻlmagan hamda ushbu yuzalar farqi cheksiz kichik boʻlish shartiga boʻysunuvchi $S(F)$ miqdorga aytiladi.

Tarifga koʻra barcha koʻpburchakli figuralar uchun tashqi va ichki koʻpburchakli figuralar yuzalari oʻzaro teng boʻladi deyish mumkin.

Istalgan shakldagi figuralar yuzalari uchun ham yuqoridagi kabi fikr yuritaylik. Figura yuzasini unga tashqi (F_t) va ichki (F_i) chizilgan figuralar yordamida tahlil qilaylik. Figurani kvadratchalar bilan qoplab, kvadratchalarning tashqi va ichki figuralardagi soni orqali F figura yuzasini baholash mumkin. Tashqi va ichki figuralarning limit holatini mos ravishda $S(F_t)$ va $S(F_i)$ kabi belgilasak, u holda $S(F_i) \leq S(F_t)$ munosabat bajariladi (1-chizma).



1-chizma. Yuzani ichki va tashqi figuralar yordamida aniqlanishi

Tarif. Figuraga tashqi va ichki chizilgan figuralar yuzalarining umumiy qiymati figuraning yuzasi deyiladi. Yaʼni,

$$S(F) = S(F_t) = S(F_i).$$

Yuzani additivligi haqidagi teoremlarni keltiraylik.

Teorema. F_1 va F_2 figuralar aniq qiymatli yuzalarga ega boʻlib, umumiy nuqtaga ega boʻlmasa, u holda

$$S(F_1 + F_2) = S(F_1) + S(F_2).$$

Teorema. Umumiy nuqtalarga ega boʻlmagan istalgan F_1 va F_2 figuralar uchun

$$S_t(F_1 + F_2) \leq S_t(F_1) + S_t(F_2),$$

$$S_i(F_1 + F_2) \geq S_i(F_1) + S_i(F_2).$$

Teorema. Figura aniq qiymatli yuzaga ega boʻlishi uchun faqat va faqat chegara yuzasi nolga teng boʻlishi kerak.

Hajm tushunchasi. Hajm tushunchasini ham yuza kabi kiritamiz. Buning uchun koʻpyoqli figura hajmi tushunchasini kiritamiz.

Koʻpyoqli figura hajmi deb quyidagi invariantlik va additivlik xossasiga boʻysunuvchi kattalikka aytiladi:

- teng figuralar teng hajmga ega;
- figura bir nechta ko'pyoqli figuralardan iborat bo'lsa, uning hajmi tashkil etuvchilar hajmlari yig'indisiga teng bo'ladi.

Hajmning $V(F)$ sonli qiymati E birlik hajmli figura bo'yicha tariflanadi.

1) $V(F) > 0$

2) Agar F va F' figuralar teng bo'lsa, u holda $V(F) = V(F')$ bo'ladi.

3) $V(F + G) = V(F) + V(G)$

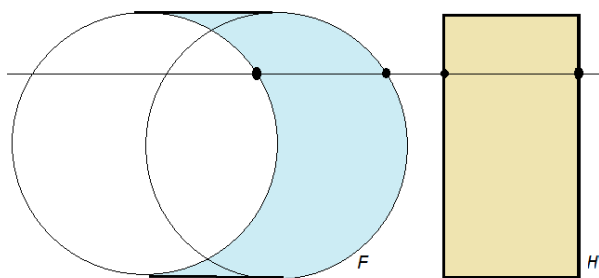
4) $V(E) = 1$, amalda birlik hajm sifatida qirrasini birga teng kub olinadi.

F figuraning hajmi deb ushbu figurani o'z ichiga olgan figura hajmidan katta bo'lmagan va figurani o'z ichiga olgan figura hajmidan kichik bo'lmagan hamda bu figuralar farqi cheksiz kichik bo'lgan hajm miqdoriga aytiladi [3].

Teorema. Figura aniq qiymatli hajmga ega bo'lishi uchun faqat va faqat chegara hajmi nolga teng bo'lishi kerak.

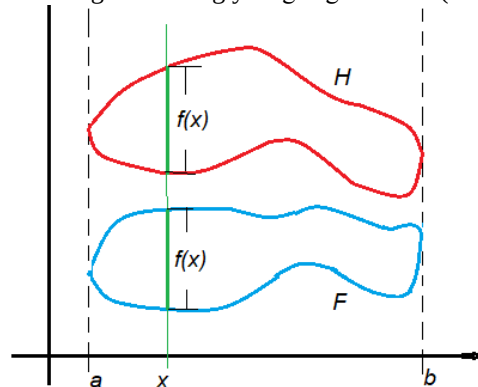
Yuzani hisoblashning Kavalyeri prinsipi deb ataluvchi usuli haqida ma'lumot keltiramiz. Italian monaxi Bonaventura Kavalyeri (1598-1647) Boloniya universiteti matematika kafedrasida faoliyat ko'rsatgan. Kavalyeri 1635-yilda "Bo'linmas qismlar yordamida uzluksiz kattaliklarni yangi usullar bilan berilishi geometriyasi" nomli kitobini nashrdan chiqardi. Asarda ko'pburchaklar yuzasini hisoblashda qismlarni qirqish va yangi figurani hosil qilish usulini qo'llagan. Bu usul bo'yicha uchburchakning asosi va balandligini o'zgartirmasdan yangi uchburchak hosil qilish mumkin.

Kavalyeri huddi shu kabi egri chiziqli figuralarni ham cheksiz ko'p "bo'linmas" parallel qatlamlardan tashkil topgan deb hisoblaydi. Bu qatlamlarni bir-biriga nisbatan silljirilganda figura yuzasi o'zgarmaydi. Kavalyeri prinsipi shundan iboratki, figurani parallel to'g'ri chiziqlar oilasi bilan kesganda ularning kesishmasida hosil bo'luvchi to'g'ri chiziq kesmalari figura yuzasini aniqlaydi. Agar ikki figura uchun bu uzunliklar bir xil bo'lsa, ular tengdosh figuralar bo'ladi (2-chizma).



2-chizma. Kavalyeri prinsipi bo'yicha tengdosh figuralar

Biz koordinata tekisligida $[a, b]$ kesmaga proyeksiyalanadigan F va H figuralarni qaraylik. Shu bilan birga Oy o'qiga parallel istalgan to'g'ri chiziqning F va H figuralar bilan kesimi teng kesmalardan iborat bo'lsin. U holda G va F figuralar teng yuzaga ega bo'ladi (3-chizma).



3-chizma. Kavalyeri prinsipining dekart sistemasida ifodalanishi

Kavalyeri o'zining ushbu prinsipidan (yuza va hajmlarni hisoblashda) N'yuton, Leybnis va boshqa olimlar boshlang'ich va integralni kiritishlaridan ancha ilgari foydalangan.

Yuza va hajmni hisoblashning universal usuli deb boshlang'ich funksiyani qo'llash usulini tushunamiz. Masalan, $y = f(x)$ funksiya, Ox o'qi, $x = a$ va $x = b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya yuzi $y = f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyalaridan biri $S(x)$ funksiya yordamida aniqlanadi, ya'ni

$$S(F) = \int_a^b f(x)dx = S(b) - S(a).$$

Hajmni hisoblashni ko'rib chiqaylik. F jismning Ox o'qidagi $[a; b]$ oraliqqa tushgan proyeksiyasi, ushbu oraliqdagi biror x nuqtasidan o'qqa perpendikulyar tekislik bilan F jism kesimi yuzasi $S(x)$ bo'lsin. Bu yerda F jism kubiklanuvchi, kesim esa kvadratlanuvchi desak, F jism hajmi

$$V(F) = \int_a^b S(x)dx.$$

Yuza va hajm tushunchasining o'rganilishi va tarixi jarayonida ularni hisoblashning qator usullarini kashf qilinganligini ko'rishimiz mumkin. Ular orasida Arximed va Kavalyeri prinsiplarini alohida ta'kidlab o'tish lozim. Ushbu usullarning takomillashuvi differensial va integral hisobning kashf etilishiga katta hissa qo'shgan deyish mumkin. Yuza va hajmni hisoblashning yuqoridagi usullari bilan bir qatorda istiqbolli usullardan biri bo'lgan sonli usullar ham rivojlandi. Shuningdek, yuzani hisoblashda ikki vektorning vektor ko'paytmasiga asoslangan oriyentrlangan yuza tushunchasi, ya'ni yuzani hisoblashda uning ishorasini ham hisobga olish usuli keng qo'llanilmoqda.

Adabiyotlar

1. Больтянский В. О понятиях площади и объема. //Научно-популярный физико-математический журнал «Квант» – М.: МЦНМО, 1977.
2. Abjalilov S.X., Abjalilov B.X., Arzikulova M.H. Yuza tushunchasining kiritilishi haqida. –Andijon: «Ilg'or PEDAGOG» Respublika ilmiy jurnali to'plami, 2-jild, №1, 2025.
3. Abjalilov S.X., Kamolov N.M., Xojamova D.S. Tekislikda akslantirishlar va almashtirishlar. // Results of National Scientific Research International Journal 1 (1), 5 may 2022, 200-205, <https://doi.org/10.5281/zenodo.6503505>

REZYUME. Maqolada yuza va hajm tushunchasining aksiomatik kiritilishi, sonli miqdor sifatida o'lchash mumkinligi hamda hisoblashning bir nechta usullari ko'rib o'tilgan.

РЕЗЮМЕ. В статье рассмотрено аксиоматическое введение понятия площади и объема, возможность измерения как числовой величины, а также несколько способов расчета.

SUMMARY. The article discusses the axiomatic introduction of the concepts of area and volume, the possibility of measurement as a numerical value, as well as several methods of calculation.