

УДК 517.958

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ

Д.К.Реймбаева – докторант

Нукусский государственный педагогический институт имени Ажиязия

Таянч сўзлар: юкори тартибли хусусий ҳосилалар дифференциал тенгламалар, бошланғич чегаравий масаласи, вақт бўйича қаср ҳосиласи, ҳос қийматлар, ҳос функциялар, тўлиқлик, спектрал усул, мавжудлик, ягоналик, қаторлар.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения в частных производных высокого порядка, начально-граничная задача, дробная производная по времени, собственные значения, собственные функции, полнота, спектральный метод, существование, единственность, ряды.

Key words: high-order partial differential equation, initial-boundary value problem, fractional time derivative, eigenvalues, eigenfunctions, completeness, spectral method, existence, uniqueness, series.

Введение. В последние десятилетия теория дифференциальных уравнений и математическая физика получили значительное развитие благодаря трудам ученых А.Н.Тихонова и А.А.Самарского [1]. Их труды заложили основу современных исследований в области уравнений с частными производными, линейных дифференциальных операторов и дробного исчисления.

Последние направления, в том числе исследование уравнений дробного порядка [2, 5, 9], приобрели актуальность для моделирования сложных физических явлений. Особое внимание уделяется задачам колебаний, где работы по теории балок и стержней [3, 4, 6–8, 10–12] помогут пониманию динамических систем.

Постановка задачи. В данном параграфе в области $Q = \Pi \times (0, T)$, где $\Pi = (0, l) \times \dots \times (0, l)$, а l, T – заданные положительные числа, рассматривается следующее более общее уравнение

$$D_j^\alpha u(y, t) + \sum_{p=1}^N a_p^2 \frac{\partial^{4m_p} u(y, t)}{\partial y_p^{4m_p}} = f(y, t), \quad (y, t) \in Q, \quad n-1 < \alpha \leq n,$$

$$0 \leq j \leq n-1, N, n, j+1 \in \mathbb{N}, m_p \in \mathbb{N}, a_p > 0, p = \overline{1, N} \quad (1)$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} D_{j-i-1}^{\alpha-i-1} u(y, t) \Big|_{t=0} = \tilde{\varphi}_i^0(y), \quad i = 0, \dots, j-1, \\ \frac{\partial^s u(y, t)}{\partial y^s} \Big|_{t=0} = \varphi_s^0(y), \quad s = 0, \dots, n-j-1 \end{cases} \quad (2)$$

и краевыми условиями

$$\begin{cases} \frac{\partial^{4k_p} u(y, t)}{\partial y_p^{4k_p}} \Big|_{y_p=0} = 0, \quad \frac{\partial^{4k_p+1} u(y, t)}{\partial y_p^{4k_p+1}} \Big|_{y_p=0} = 0, \\ \frac{\partial^{4k_p} u(y, t)}{\partial y_p^{4k_p}} \Big|_{y_p=l} = 0, \quad \frac{\partial^{4k_p+3} u(y, t)}{\partial y_p^{4k_p+3}} \Big|_{y_p=l} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где $k_p = 0, m_p - 1, p = \overline{1, N}$. Здесь $(y, t) = (y_1, \dots, y_j, \dots, y_N, t) \in Q$, число $a_p > 0$ фиксировано, а $f(y, t)$ и $\tilde{\varphi}_i^0(y)$, $i = 0, \dots, j-1$, $\varphi_s^0(y)$, $s = 0, \dots, n-j-1$ – достаточно гладкие функции, разлагаемые по собственным функциям $\{v_n(y), n \in \overline{1, N}\}$ следующей спектральной задачи:

$$\sum_{p=1}^N a_p^2 \frac{\partial^{4m_p} v(y)}{\partial y_p^{4m_p}} - \lambda v(y) = 0, \quad (4)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^{4k_p} v(y)}{\partial y_p^{4k_p}} \Big|_{y_p=0} = 0, \quad \frac{\partial^{4k_p+1} v(y)}{\partial y_p^{4k_p+1}} \Big|_{y_p=0} = 0, \\ \frac{\partial^{4k_p+1} v(y)}{\partial y_p^{4k_p+1}} \Big|_{y_p=l} = 0, \quad \frac{\partial^{4k_p+3} v(y)}{\partial y_p^{4k_p+3}} \Big|_{y_p=l} = 0, \quad k_p = \overline{0, m_p-1}, \quad p = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (5)$$

λ – спектральный параметр, D_j^α – интегро-дифференциальный оператор в смысле Миллера–Росса по Римана – Лиувилля.

Предварительные сведения

Пусть $f(t): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ функция n раз непрерывно дифференцируемая и $n-1 \leq \alpha < n, n \in \mathbb{N}$. Дробная производная по Римана–Лиувилля порядка α определяется с равенством

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(l-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^l \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad (6)$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера. Эта функция удовлетворяет равенство $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Дробная производная или регуляризованной дробной производной по Капута порядка α определяется с равенством

$$D^{(\alpha)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau. \quad (7)$$

Справедлива формула

$$D^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0) + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau. \quad (8)$$

Таким образом, производная в смысле Римана–Лиувилля может быть представлена в виде суммы сингулярных членов

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0) \quad (9)$$

и регуляризованной дробной производной по Капута порядка α :

$$\frac{1}{\Gamma(l-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau. \quad (10)$$

Присутствие слагаемых (9) приводит к тому, что дробные производные Римана–Лиувилля имеют особенность в нуле и в задаче Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка в смысле Римана–Лиувилля необходимо задавать начальные условия специального вида, не имеющие чётко физической интерпретации.

Этих недостатков дробной производной Римана–Лиувилля лишена регуляризованная производная порядка α ($n-1 \leq \alpha < n, n \in \mathbb{N}$)

$$D^{(\alpha)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau =$$

$$= D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0), \quad (11)$$

которая была впервые введена в работе Капуто [19], а также независимо от него в работах Джрбашьяном и Нерсисяном [20].

Как производные Римана–Лиувилля, так и производные Капуто не обладают ни полугрупповым свойством, ни тем более свойством коммутативности, т.е. существует функции $f(t)$ и $g(t)$, который

$$D^{\alpha+\beta} f(t) \neq D^\alpha D^\beta f(t), \quad D^\alpha D^\beta f(t) \neq D^\beta D^\alpha f(t),$$

$$D^{(\alpha+\beta)} f(t) \neq D^{(\alpha)} D^{(\beta)} f(t),$$

$$D^{(\alpha)} D^{(\beta)} f(t) \neq D^{(\beta)} D^{(\alpha)} f(t).$$

В связи с этим Миллером и Россом [21] были введены так называемые секвенциальные производные, дробного порядка:

$$D^\alpha f(t) = D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} \dots D^{\alpha_m} f(t), \quad (12)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ – мультииндекс, функция $f(t)$ предполагается достаточное число раз непрерывно дифференцируемой. Вообще говоря, в качестве оператора D^α , лежащего в основе секвенциальной производной Миллера – Росса, можно использовать оператор дробного дифференцирования по Риману – Лиувилля, Капуто или любую другую его разновидность. В частности, для целых α_i это может быть

оператор обычного дифференцирования $\left(\frac{d}{dt}\right)^{\alpha_i}$.

Использование секвенциальных производных Миллера – Росса позволяет, в частности, понижать порядок дифференциальных уравнений.

Выберем некоторое $\nu, n-1 \leq \nu < n, n \in \mathbb{N}$ и пусть $\alpha = (j, \nu-n+1, n-1-j)$, $j=0, \dots, n-1$. Определим производные дробного порядка в смысле Миллера – Росса по Римана – Лиувилля и в смысле Миллера – Росса по Капуто с равенствами соответственно

$$D_j^\nu f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^j D^{\nu-n+1} \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1-j} f(t),$$

$$D_j^{(\nu)} f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^j D^{(\nu-n+1)} \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1-j} f(t),$$

где $j=0, 1, \dots, n-1$.

Эти производные дробного порядка в смысле Миллера – Росса по Римана – Лиувилля $D_j^\nu f(t)$ и в смысле Миллера – Росса по Капуто $D_j^{(\nu)} f(t)$ связаны с равенствами

$$D_0^{(\nu)} f(t) = D^{(\nu)} f(t) = D^\nu f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} f^{(k)}(0),$$

$$D_1^{(\nu)} f(t) = D_0^\nu f(t) = D^{(\nu)} f(t) + \frac{t^{n-1-\nu}}{\Gamma(n-\nu)} f^{(n-1)}(0) =$$

$$= D^\nu f(t) - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} f^{(k)}(0)$$

$$\dots \dots \dots D_j^{(\nu)} f(t) = D_{j-1}^\nu f(t) = D^{(\nu)} f(t) + \sum_{k=n-j}^{n-1} \frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} f^{(k)}(0) =$$

$$= D^\nu f(t) - \sum_{k=0}^{n-1-j} \frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} f^{(k)}(0)$$

$$D_{n-1}^{(\nu)} f(t) = D_{n-2}^\nu f(t) = D^{(\nu)} f(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} f^{(k)}(0) =$$

$$= D^\nu f(t) - \frac{t^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} f(0)$$

$$D_{n-1}^\nu f(t) = D^{(\nu)} f(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} f^{(k)}(0) = D^\nu f(t),$$

где $n-1 \leq \nu < n, l \in \mathbb{N}$ и для функции $f(t)$ производная порядка $l-1$ абсолютно непрерывная функция. Доказательство этих утверждений дано в работах Чикрий и Матичина [13].

Основная часть

Будем искать собственные функции задачи (4), (5) в виде произведения $v(y) = \prod_{i=1}^N X_i(y_i)$. Тогда для определения каждого $X_i(y_i)$, $i=1, N$, мы получаем следующую одномерную спектральную задачу:

$$X^{(4m)}(x) - \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (13)$$

$$X^{(4k)}(0) = X^{(4k+1)}(0) = X^{(4k+1)}(l) = X^{(4k+3)}(l) = 0, \quad k = \overline{0, m-1}. \quad (14)$$

Здесь для простоты $X_i(y_i)$ обозначены через $X(x)$.

Введем пространство $W_2^s(0, l)$ с нормой

$$\|f\|_{W_2^s(0, l)}^2 = \|f\|_{L_2(0, l)}^2 + \|D^s f\|_{L_2(0, l)}^2,$$

где s – произвольное натуральное число, при этом $W_2^0(0, l) = L_2(0, l)$.

Обозначим через L дифференциальный оператор, порожденный дифференциальным выражением $l(X) = X^{(4m)}(x)$ в пространстве $W_2^{4m}(0, l)$, функций $X(x)$, удовлетворяющих граничным условиям (14).

Такое пространство обозначим через $W_2^{4m}(0, l)$.

Справедлива следующая

Теорема. Пусть начальные функции $\tilde{\varphi}_i^0(x)$, $i=0, \dots, j-1$; $\varphi_s^0(x)$, $s=0, \dots, n-j-1$ и правая часть $f(y, t)$ удовлетворяют условию (30) при каждом $t > 0$. Тогда регулярное решение задачи (1)–(3) из

класса $W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$ с показателем $s_p > 4m_p + \frac{N}{2}$, $p = \overline{1, N}$, $\theta > -[-\alpha] + \frac{N}{2}$ существует, единственно и представляется в виде ряда (29), где коэффициенты определяются по формулам (19)–(21).

Доказательство. Докажем теперь существование и единственность решения начально-граничной задачи (1)–(3). Регулярным решением уравнения (1) в области $Q = \Pi \times (0, T)$ назовем функцию $u(y, t)$ из класса $u(y, t) \in C(Q)$, $D_{0t}^\alpha u(y, t) \in C(Q)$, $\frac{\partial^{4m} u(y, t)}{\partial y_j^{4m}} \in C(Q)$, $j = \overline{1, 2, \dots, N}$ и удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $(y, t) \in Q$.

Обозначим через $W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$ множество всех функций $u(y, t) \in W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$, удовлетворяющих граничным условиям $\frac{\partial^{4k_j} u(y, t)}{\partial y_j^{4k_j}} \Big|_{y_j=0} = 0$ при $0 \leq k_j < \frac{2s_j - N}{8}$, $\frac{\partial^{4k_j+1} u(y, t)}{\partial y_j^{4k_j+1}} \Big|_{y_j=0} = 0$ при $0 \leq k_j < \frac{2s_j - N - 2}{8}$, $\frac{\partial^{4k_j+1} u(y, t)}{\partial y_j^{4k_j+1}} \Big|_{y_j=l} = 0$ при $0 \leq k_j < \frac{2s_j - N - 2}{8}$, $\frac{\partial^{4k_j+3} u(y, t)}{\partial y_j^{4k_j+3}} \Big|_{y_j=l} = 0$ при $0 \leq k_j < \frac{2s_j - N - 6}{8}$, $j = \overline{1, N}$.

Функцию $u(y, t)$ назовем регулярным решением задачи (1)–(3) в области $Q = \Pi \times (0, T)$, если функция $u(y, t)$ – регулярное решение уравнения (1) в области $Q = \Pi \times (0, T)$ из класса $D_{0t}^{\alpha-i} u(y, t) \in C(\overline{Q})$, $i = \overline{1, -[-\alpha]}$, $u(y, t) \in C(\overline{Q})$, $\frac{\partial^{4m-1} u(y, t)}{\partial y_j^{4m-1}} \in C(\overline{Q})$, $j = \overline{1, N}$ и удовлетворяет начальным и граничным условиям (2) и (3).

Пусть функция $u(y, t) \in W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$ с показателем $s_1 > 4m_1 + \frac{N}{2}$, $s_2 > 4m_2 + \frac{N}{2}$, ..., $s_N > 4m_N + \frac{N}{2}$, $\theta > -[-\alpha] + \frac{N}{2}$ удовлетворяет уравнению (1) во всех точках $(y, t) \in Q$ и удовлетворяет начальным и граничным условиям (2) и (3). Тогда функция $u(y, t)$ является регулярным решением задачи (1)–(3) в области Q .

Введем функции

$$T_{n_1, \dots, n_N}(t) = \int_{\Pi} u(y, t) \tilde{v}_{n_1, \dots, n_N}(y) dy, \quad (15)$$

где

$$\tilde{v}_{n_1, \dots, n_N}(y) = \prod_{p=1}^N \tilde{X}_{n_p}(y_p). \quad (16)$$

В силу (1)–(3) неизвестные функции $T_n(t) = T_{n_1, \dots, n_N}(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} D_j^\alpha T_{n_1, \dots, n_N}(t) + \lambda_{n_1, \dots, n_N} T_{n_1, \dots, n_N}(t) \\ = f_{n_1, \dots, n_N}(t), n_p \in \overline{Z_+}, n-1 < \alpha \leq n, \\ 0 \leq j \leq n-1, N, n, j+1 \in \mathbb{N}, m_p \in \mathbb{N}, a_p > 0, p = \overline{1, N} \end{aligned} \quad (17)$$

и начальным условиям

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} D_{j-i-1}^{\alpha-i-1} T_{n_1, \dots, n_N}(t) = \tilde{\varphi}_i^0, i \\ = 0, \dots, j-1; n_1, \dots, n_N \in \overline{Z_+}, \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial^s T_{n_1, \dots, n_N}(t)}{\partial t^s} = \varphi_{s; n_1, \dots, n_N}^0, s = 0, \dots, -[-\alpha] - j - 1; n_1, \dots, n_N \in \overline{Z_+}, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$f_{n_1, \dots, n_N}(t) = \int_{\Pi} f(y, t) \tilde{v}_{n_1, \dots, n_N}(y) dy, \quad (19)$$

$$\tilde{\varphi}_i^0, i = \overline{0, \dots, j-1}; n_1, \dots, n_N \in \overline{Z_+}, \quad (20)$$

$$\varphi_i^0, i = \overline{0, \dots, -[-\alpha] - j - 1}; n_1, \dots, n_N \in \overline{Z_+}. \quad (21)$$

Решение задачи Коши (17), (18) известно (см., например [14, с. 262-278]), и оно имеет вид

$$\begin{aligned} T_{n_1, \dots, n_N}(t) = \sum_{s=0}^{-[-\alpha]-j-1} \varphi_{s; n_1, \dots, n_N}^0 \cdot t^s \\ \cdot E_{\frac{1}{\alpha}}(-\lambda_{n_1, \dots, n_N} \cdot t^\alpha; s+1) + \\ + \sum_{i=0}^{j-1} \tilde{\varphi}_i^0, n_1, \dots, n_N \cdot t^{\alpha-i-1} \\ \cdot E_{\frac{1}{\alpha}}(-\lambda_{n_1, \dots, n_N} \cdot t^\alpha; \alpha-i) + \\ + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \cdot E_{\frac{1}{\alpha}}[-\lambda_{n_1, \dots, n_N}(t-\tau)^\alpha; \alpha] f_{n_1, \dots, n_N}(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (22)$$

где $E_\eta(x; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k\eta + \mu)}$ функция

Миттаг-Леффлера

$$\mu_{n_1, \dots, n_N} = -\lambda_{n_1, \dots, n_N} = -\sum_{p=1}^N a_p^2 \lambda_{n_p} = -\sum_{p=1}^N a_p^2 b_{n_p}^{4m_p}, \quad (23)$$

$$E_{\frac{1}{\alpha}}(-\lambda_{n_1, \dots, n_N} \cdot t^\alpha; s+1) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_{n_1, \dots, n_N} t^\alpha)^q}{\Gamma(\alpha q + s+1)}, \quad (24)$$

$$E_{\frac{1}{\alpha}}(-\lambda_{n_1, \dots, n_N} \cdot t^\alpha; \alpha-i) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_{n_1, \dots, n_N} t^\alpha)^q}{\Gamma(\alpha q + \alpha-i)}, \quad (25)$$

$$E_{\frac{1}{\alpha}}[-\lambda_{n_1, \dots, n_N}(t-\tau)^\alpha; \alpha] = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_{n_1, \dots, n_N}(t-\tau)^\alpha)^q}{\Gamma(\alpha q + \alpha)}. \quad (26)$$

Поскольку функции (15) построены в явном виде (22), то на основании полноты системы собственных функций (16) в $L_2(\Pi)$ нетрудно доказать единственность решения задачи (1)–(3).

Пусть $f(y, t) \equiv 0$ и $\tilde{\varphi}_i^0(x) \equiv 0$, $i = 0, \dots, j-1$; $\varphi_s^0(x) \equiv 0$, $s = 0, \dots, n-j-1$. Тогда из формулы (15) и (22) следует, что

$$\int_{\Pi} u(y, t) \tilde{v}_{n_1, \dots, n_N}(y) dy = 0 \quad (27)$$

при всех $n_1, \dots, n_N \in \overline{\mathbb{Z}_+}$ и любом $t \in [0, T]$. Отсюда в силу полноты системы собственных функций (16) в $L_2(\Pi)$ вытекает, что $u(y, t) = 0$ почти всюду в области Π при любом $t \in [0, T]$. Как известно, по теореме вложения Соболева, если функция $u(y, t)$ непрерывна на $\bar{Q}$, то $u(y, t) \equiv 0$ в $\bar{Q}$. Это доказывает единственность решения задачи (1)–(3).

При каждом $t > 0$ функция $u(y, t) \in W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$ по переменной y является функцией из класса $u(y, t) \in W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$. Поэтому, рассматривая $t > 0$ как параметр, решение задачи (1)–(3) будем искать из класса $W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$ в виде суммы ряда по системе собственных функций (16) спектральной задачи (4)–(5):

$$u(y, t) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_N=0}^{\infty} T_{n_1, \dots, n_N}(t) \tilde{v}_{n_1, \dots, n_N}(y), \quad (28)$$

где $\tilde{v}_{n_1, \dots, n_N}(y) = \prod_{p=1}^N \tilde{X}_{n_p}(y_p)$, $T_{n_1, \dots, n_N}(t)$ определяется по формуле (15). После подстановки (22) в (28) мы получим единственное решение задачи (1)–(3) в виде ряда

$$\begin{aligned} u(y, t) = & \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_N=0}^{\infty} \left[\sum_{s=0}^{-[-\alpha]-j-1} \varphi_{s; n_1, \dots, n_N}^0 \cdot t^s \right. \\ & \cdot E_{\frac{1}{\alpha}}(-\lambda_{n_1, \dots, n_N} \cdot t^\alpha; s+1) + \\ & + \sum_{i=0}^{j-1} \tilde{\varphi}_{i; n_1, \dots, n_N}^0 \cdot t^{\alpha-i-1} \\ & \cdot E_{\frac{1}{\alpha}}(-\lambda_{n_1, \dots, n_N} \cdot t^\alpha; \alpha-i) + \\ & \left. + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \cdot E_{\frac{1}{\alpha}}[-\lambda_{n_1, \dots, n_N}(t-\tau)^\alpha; \alpha] f_{n_1, \dots, n_N}(\tau) d\tau \right] \cdot \tilde{v}_{n_1, \dots, n_N}(y_1, \dots, y_N). \quad (29) \end{aligned}$$

Поскольку система собственных функций (16) спектральной задачи (4), (5) образует базис Рисса в пространстве Соболева $H^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$, то любая функция из этого класса разлагается единственным образом в ряд Фурье, сходящийся по норме

пространства $H^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$. Поэтому ряд (29) сходится в $H^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$ при любом $t \in [0, T]$. Выясним условия

существования решения из класса $W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$. Согласно вышеупомянутой теореме, система собственных функций (16) спектральной задачи (4), (5) образует базис Рисса в пространствах Соболева $H^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$ и $W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(Q)$.

Поэтому по теореме вложения Соболева справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|u(y, t)\|_{C^{4m, 4m, \dots, 4m}(\Pi)}^2 & \leq c_8 \|u(y, t)\|_{H^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)}^2 \leq \\ & \leq c_9 \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_N=0}^{\infty} \left| \sum_{s=0}^{-[-\alpha]-j-1} \varphi_{s; n_1, \dots, n_N}^0 \cdot t^s \right. \\ & \quad \cdot E_{\frac{1}{\alpha}}(-\lambda_{n_1, \dots, n_N} \cdot t^\alpha; s+1) + \\ & \quad + \sum_{i=0}^{j-1} \tilde{\varphi}_{i; n_1, \dots, n_N}^0 \cdot t^{\alpha-i-1} \cdot E_{\frac{1}{\alpha}}(-\lambda_{n_1, \dots, n_N} \cdot t^\alpha; \alpha-i) \\ & \quad \left. + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \cdot E_{\frac{1}{\alpha}}[-\lambda_{n_1, \dots, n_N}(t-\tau)^\alpha; \alpha] f_{n_1, \dots, n_N}(\tau) d\tau \right|^2 \cdot \prod_{p=1}^N (1 + b_{n_p}^{2s_p}). \end{aligned}$$

Отсюда можно утверждать, что достаточным условием существования регулярного решения задачи (1)–(3) из класса $W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$ с показателем

$$s_1 > 4m_1 + \frac{N}{2}, \quad s_2 > 4m_2 + \frac{N}{2}, \quad \dots, \quad s_N > 4m_N + \frac{N}{2},$$

$\theta > -[-\alpha] + \frac{N}{2}$ является условие вида:

$$\begin{aligned} \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_N=0}^{\infty} \left| \sum_{s=0}^{-[-\alpha]-j-1} \varphi_{s; n_1, \dots, n_N}^0 \cdot t^s \right. \\ \cdot E_{\frac{1}{\alpha}}(-\lambda_{n_1, \dots, n_N} \cdot t^\alpha; s+1) + \\ + \sum_{i=0}^{j-1} \tilde{\varphi}_{i; n_1, \dots, n_N}^0 \cdot t^{\alpha-i-1} \\ \cdot E_{\frac{1}{\alpha}}(-\lambda_{n_1, \dots, n_N} \cdot t^\alpha; \alpha-i) + \\ \left. + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \cdot E_{\frac{1}{\alpha}}[-\lambda_{n_1, \dots, n_N}(t-\tau)^\alpha; \alpha] f_{n_1, \dots, n_N}(\tau) d\tau \right|^2 \cdot \prod_{p=1}^N (1 + b_{n_p}^{2s_p}) < \infty. \quad (30) \end{aligned}$$

Если $0 < \alpha < 2$, то с учетом неравенства $\mu_{m_1, \dots, m_N} < 0$,

где $\mu_{n_1, \dots, n_N} = -\lambda_{n_1, \dots, n_N} = -\sum_{p=1}^N a_p^2 b_{n_p}^{4m_p}$ и с учетом оценки функции Миттаг-Леффлера

$$\begin{aligned} \left| E_{\frac{1}{\alpha}}(-\lambda_{m_1, \dots, m_N} \cdot t^\alpha; \mu) \right| & \leq \frac{C}{1 + |\lambda_{m_1, \dots, m_N} \cdot t^\alpha|}, \\ \left| E_{\frac{1}{\alpha}}(-\lambda_{m_1, \dots, m_N} \cdot t^\alpha; \alpha-i) \right| & \leq \frac{C}{1 + |\lambda_{m_1, \dots, m_N} \cdot t^\alpha|}, \end{aligned}$$

$$\left| E_{\frac{1}{\alpha}} \left(-\lambda_{m_1, \dots, m_N} \cdot (t-\tau)^{\alpha}; \alpha \right) \right| \leq \frac{C}{1 + |\lambda_{m_1, \dots, m_N}| \cdot (t-\tau)^{\alpha}}$$

можно упростить достаточные условия (30) существования регулярного решения задачи (1)–(3) из класса

$$W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$$

с

показателем

$$s_p > 4m_p + \frac{N}{2}, \quad p = \overline{1, N}, \quad \theta > -[-\alpha] + \frac{N}{2}.$$

Если $0 < \alpha < 2$, $0 < t \leq T$ и для любого $j = \overline{1, -[-\alpha]}$

справедливы условия

$$\begin{aligned} & \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} |\varphi_{j; n_1, \dots, n_N}|^2 \cdot \prod_{p=1}^N (1 + b_{n_p}^{2s_p}) < \text{Const} \|\varphi_j(x)\|_{W_2^{s_1, \dots, s_N}(\Pi)} < \infty, \\ & \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} \left| \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f_{n_1, \dots, n_N}(\tau) d\tau \right|^2 \cdot \prod_{p=1}^N (1 + b_{n_p}^{2s_p}) < \\ & \text{Const} \|f(x)\|_{W_2^{s_1, \dots, s_N}(\Pi)} < \infty, \end{aligned}$$

то условие (30) будет выполнено.

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Москва: Изд-во. МГУ, 1999. – 798 стр.
2. Igor Podlubny. Fractional Differential Equations // Mathematics in science and engineering. Volume 198. 1999. -р. 340.
3. Коренев Б.Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании. -М.: «Наука», 1965. -С. 355.
4. Крылов А.Н. Вибрация судов. -М.: «Наука», 2012. -С. 216.
5. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – Москва: «Физматлит», 2003. –С. 272.
6. Сабитов К.Б. Колебания балки с заделанными концами. // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 19. № 2, -С. 311 - 324.
7. Сабитов К.Б. К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок. // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. № 1, -С. 89-100.
8. Сабитов К.Б. Начальная задача для уравнения колебаний балки. // Дифференциальные уравнения. 2017. -Т. 53. № 5, -С. 665-671.
9. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Изд-во. «Наука и техника», 1987. –С. 688.
10. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. -М.: «Машиностроение», 1985. -С. 472.
11. Касимов Ш.Г., Мадрахимов У.С. Начально-граничная задача для уравнения балки в многомерном случае // Дифференциальные уравнения. 2019 г. Том. 55, №10, -С. 1379-1391.
12. Kasimov Sh.G., Madрахimov U.S. On the unique solvability for initial-boundary problems of vibrations of a beam, one end of which is fixed and the other is free, in the Sobolev classes in the multidimensional case // Uzbek mathematical journal. Tashkent “FAN”. 2019, № 4, DOI: 10.29229/uzmj. 2019-4-9. pp. 92-106.
13. Chikriy A.A., Matichin I.I. Presentation of solutions of linear systems with fractional derivatives in the sense of Riemann-Liouville, Caputo and Miller–Ross // J. Autom. Inform. Sci. 2008. Vol. 40, no. 6. -P. 1-11.
14. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – Москва: «Наука», 1966. -С. 672.

РЕЗЮМЕ. Ишда Соболев синфларида қўйилган масаланинг ечими мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги теоремани исботлади. Қўриб чиқиладиган масаланинг ечимини қўп ўлчовли спектрли масаланинг хос функциялари системаси устидаги қаторлар йигиндиси сифатида қурилди.

РЕЗЮМЕ. В работе доказана теорема существования и единственности решения поставленной задачи в классах Соболева. Решение рассматриваемой задачи построено в виде суммы ряда по системе собственных функций многомерной спектральной задачи.

SUMMARY. The paper proves the theorem of the existence and uniqueness of the solution of the problem in Sobolev classes. The solution of the problem under consideration is constructed as the sum of a series according to the system of eigenfunctions of a multidimensional spectral problem.