

# ФОРМУЛА КАРЛЕМАНА ДЛЯ МАТРИЧНОГО ПОЛИКРУГА В ПРОСТРАНСТВЕ КОСОСИММЕТРИЧНЫХ МАТРИЦ

**З.К.Матякубов** – доктор философии физико-математических наук, доцент  
Хорезмская академия Маъмуна, Ургенчский государственный университет

**А.М.Халкназаров** – доктор философии физико-математических наук  
Нукусский государственный педагогический институт имени Ажинияза

**Таянч сўзлар:** матрицавий полидоира, классик соҳа, Шилов чегараси, автоморфизм, Карлеман формуласи.

**Ключевые слова:** матричный поликруг, классическая область, граница Шилова, автоморфизм, формула Карлемана.

**Key words:** matrix polydisk, classical domain, Shilov boundary, automorphism, Carleman formula.

**1. Введение.** В данной работе получена интегральная формула в матричном поликруге, позволяющая восстановить значение функции из класса Харди в любой внутренней точке матричного поликруга по ее значениям на части остова.

Вопрос о нахождении формул Карлемана давно привлекает многих специалистов по комплексному анализу и математической физике. Эти формулы позволяют решать некорректные задачи математической физики и анализа. Например, восстанавливать значения голоморфных или гармонических функций в области по их значениям на множествах единственности. Первый результат в этом направлении был получен Т.Карлеманом в 1926 г. в (см. [1]), поэтому все формулы такого типа принято называть формулами Карлемана. Эти исследования были продолжены Г.М.Голузиным и В.И.Крыловым, давшими общий способ получения формул Карлемана в одномерном комплексном анализе. Их метод не работал в многомерном случае. В 1956 М.М.Лаврентьев предложил свой метод, основанный на аппроксимации ядер интегральных представлений.

Дальнейшее развитие этой теории в многомерном комплексном анализе можно найти в книге Л.А.Айзенберга (см. [1]) построившего формулу Карлемана на основе интегрального представления Бохнера-Мартинелли в выпуклых (или линейно выпуклых) ограниченных областях.

Известно, что формулы в духе Карлемана решают задачу восстановления голоморфной функции в области  $D$ , достаточно хорошо себя ведущей при подходе к границе  $\partial D$ , по ее значениям на некотором множестве единственности  $M \subset \partial D$ , не содержащей границу Шилова.

Определим класс  $H^p(D)$  ( $p > 0$ ) как класс всех функций  $f$ , голоморфных в  $D$ , для которых

$$\sup_{0 < r < 1} \int_{S(D)} |f(rU)|^p d\mu < +\infty,$$

здесь  $rU = (ru_{11}, ru_{12}, \dots, ru_{mm})$ , а  $d\mu$  – нормированная мера Лебега на многообразии  $S(D)$ , инвариантная относительно поворотов.

Пусть  $\mathfrak{R}_3$  – классическая область третьего типа по классификации Э. Картана, определяется как множество (см. [5])

$$\mathfrak{R}_3 = \{Z \in J[m \times m]: I + Z\bar{Z} > 0\},$$

где  $Z$  – кососимметрические матрицы порядка  $m$ , ( $I$  – единичная  $[m \times m]$  – матрица).

На границе лежит множество

$$S_3 = \{Z \in J[m \times m]: I + Z\bar{Z} = 0\},$$

которое называется остовом  $\mathfrak{R}_3$  (заметим, что  $S_3$  является границей Шилова для  $\mathfrak{R}_3$ ).

Пусть множество  $M \subset S_3$  имеет положительную меру:  $\mu_1(M) > 0$ ,  $\mu_1$  – мера Хаара на  $S_3$ .

Обозначим

$$M_{0,u} = \{\xi: \xi \in M, \xi = \lambda u, |\lambda| = 1\}, u \in SU(m), \quad (1)$$

$$M'_0 = \{u: u \in SU(m), m_1 M_{0,u} > 0\},$$

где  $SU(m)$  – группа специальных унитарных матриц  $u$ , т.е.  $\det(u) = 1$ ,  $m_1$  – нормированная мера Лебега на единичной окружности  $\partial U$ . По теореме Фубини  $\mu_0(M'_0) > 0$ ,  $\mu_0$  – нормированная мера Лебега на  $SU(m)$ .

**Лемма 1 (см. [3]).** Мера Хаара  $d\mu$  многообразия  $S_3$  может быть записана в виде

$$d\mu = h(u) d\varphi d\mu_0(u),$$

где  $d\mu_0$  – нормированная мера Лебега на  $SU(m)$ , а  $h$  – гладкая положительная функция на  $SU(m)$ ,

Далее, пусть

$$\varphi_0 = \exp \psi_0, \text{ где } \psi_0(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{M_{0,u}} \frac{\eta + \lambda}{\eta - \lambda} \frac{d\eta}{\eta}.$$

**Лемма 2 (см. [1], [3]).** Пусть  $f \in H^1(\mathfrak{R}_3)$ , тогда справедлива формула

$$f(0) = \frac{m}{\int_{M'_0} d\mu_0} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_M f(\xi) \left[ \frac{\varphi_0(\xi)}{\varphi_0(0)} \right]^l d\mu_1. \quad (2)$$

## II. Основная часть

Пусть  $Z = (Z^1, Z^2, \dots, Z^n) \in J^n[m \times m]$  – вектор, составленный из квадратных матриц порядка  $m$ , рассматриваемых над полем комплексных чисел  $J$ .

Матричный единичный поликруг  $T_n$  в пространстве  $J^{\frac{n(m-1)}{2}}$  определяется как прямое произведение  $\mathfrak{R}_3$ :

$$T_n = \mathfrak{R}_3^n = \underbrace{\mathfrak{R}_3 \times \dots \times \mathfrak{R}_3}_{n \text{ раз}}$$

$$= \{Z = (Z^1, \dots, Z^n): Z^j \in \mathfrak{R}_3, (Z^j)' = -Z^j, j = 1, \dots, n\}.$$

Остовом матричного единичного поликруга является множество

$$\Gamma_n = \underbrace{S_3 \times \dots \times S_3}_{n \text{ раз}}.$$

Рассмотрим автоморфизм матричного единичного поликруга  $T_n$ , переставляющий точки  $A \in T_n$  и  $0$ . Такой автоморфизм имеет вид (см. [5], ст. 86)

$$\Phi_A(Z) = (\Phi_A^1(Z^1), \dots, \Phi_A^n(Z^n)),$$

где

$$\Phi_A^j(Z^j) = Q^j(Z^j - A^j)(I + \bar{A}^j Z^j)^{-1}(\bar{Q}^j)^{-1}, \quad j=1,2,\dots,n,$$

$$Q^j - [m \times m] \text{ матрицы, удовлетворяющие условиям}$$

$$\bar{Q}^j(I + A^j \bar{A}^j)(Q^j)' = I.$$

В частности, при  $A = 0$  получим

$$\Phi_0(Z) = (\Phi_0^1(Z^1), \dots, \Phi_0^n(Z^n)) \text{ и}$$

$$\Phi_0^j(Z^j) = Q^j Z^j (\bar{Q}^j)^{-1}.$$

Пусть  $E = (E^1, \dots, E^n) \subset \Gamma_n$  и  $\mu E > 0$ . Проекцию остова  $\Gamma_n$  на пространстве  $J^{n-1}[m \times m]$  обозначим через  $\Gamma_{n-1}$ . Точки  $\Gamma_{n-1}$  обозначим через  $\xi = (\xi^2, \dots, \xi^n)$ .

Определим множества

$$E_{0,\xi} = \left\{ Z : Z \in E, \Phi_0^1(Z^1) = \theta, \Phi_0^j(Z^j) = \begin{cases} \theta \Phi_0^j(\xi^j), & j = 2, n, \theta \in S_2 \end{cases} \right\},$$

$$\tilde{E}_0 = \{Z \in E : \mu_1 E_{0,\xi} > 0\}.$$

Множества  $E_{0,\xi}$  и  $\tilde{E}_0$  являются подмножествами с положительной мерой множества  $E$  и их декартово произведение совпадает с  $E$ , т.е.  $E = E_{0,\xi} \times \tilde{E}_0$ .

Введем вспомогательную функцию  $\varphi_0 = \exp \psi_0$ , где

$$\psi_0(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{E_{0,\xi}^1} \frac{\eta + \lambda}{\eta - \lambda} \frac{d\eta}{\eta}.$$

Множество  $E_{0,\xi}^1$  - определяется так же, как в (1), и его декартово произведение с множеством  $\tilde{E}_{0,\xi}$  образует множество  $E_{0,\xi}$ , т.е.  $E_{0,\xi}^1 \times \tilde{E}_{0,\xi} = E_{0,\xi}$ .

**Лемма 3.** Пусть  $f \in H^1(T_n)$ ,  $E \subset \Gamma_n$ ,  $\mu(E) > 0$ . Тогда справедлива следующая формула

$$f(0) = \frac{m}{\int_{\tilde{E}_0} d\mu_{n-1} \int_{\tilde{E}_{0,\xi}} d\mu_0} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_E f(Z) \left[ \frac{\varphi_0(\xi)}{\varphi_0(0)} \right]^l d\mu. \quad (3)$$

**Доказательство.** Пусть множество  $E \subset \Gamma_n$ ,  $\mu(E) > 0$ . Рассмотрим проекцию  $E$  на  $S_3$ , эту проекцию обозначим через  $E_{0,\xi}$ . Для множества  $E_{0,\xi}$ , по лемме 2 верна формула

$$f(0) = \frac{m}{\int_{\tilde{E}_0} d\mu_{n-1} \int_{\tilde{E}_{0,\xi}} d\mu_0} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\tilde{E}_{0,\xi}} f(\xi) \left[ \frac{\varphi_0(\xi)}{\varphi_0(0)} \right]^l d\mu_1.$$

Интегрируем обе части этого равенства по  $\tilde{E}_0$ :

$$\int_{\tilde{E}_0} f(0) d\mu_{n-1} = \int_{\tilde{E}_0} \left( \frac{m}{\int_{\tilde{E}_{0,\xi}} d\mu_0} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\tilde{E}_{0,\xi}} f(\xi) \left[ \frac{\varphi_0(\xi)}{\varphi_0(0)} \right]^l d\mu_1 \right) d\mu_{n-1}.$$

Так как

$$\left| \int_{E_{0,\xi}} f(\xi) \left[ \frac{\varphi_0(\xi)}{\varphi_0(0)} \right]^l d\mu_1 \right| \leq \left| \int_{S_3} f(\xi) \left[ \frac{\varphi_0(\xi)}{\varphi_0(0)} \right]^l d\mu_1 \right| +$$

$$+ \left| \int_{S_3 \setminus E_{0,\xi}} f(\xi) \left[ \frac{\varphi_0(\xi)}{\varphi_0(0)} \right]^l d\mu_1 \right| \leq |f(0)| + \int_{S_3} |f(\xi)| d\mu_1$$

подинтегральное выражение ограничено. Отсюда и по теореме Лебега (см. [4]) имеем следующее

$$f(0) = \frac{m}{\int_{\tilde{E}_0} d\mu_{n-1} \int_{\tilde{E}_{0,\xi}} d\mu_0} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\tilde{E}_0} f(Z) \left[ \frac{\varphi_0(\xi)}{\varphi_0(0)} \right]^l d\mu_{n-1}.$$

По определению, множество  $E = E_{0,\xi} \times \tilde{E}_0$ , отсюда по теореме Фубини (см. [4]) из последнего равенства получим

$$f(0) = \frac{m}{\int_{\tilde{E}_0} d\mu_{n-1} \int_{\tilde{E}_{0,\xi}} d\mu_0} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_E f(Z) \left[ \frac{\varphi_0(\xi)}{\varphi_0(0)} \right]^l d\mu.$$

Мы здесь, как в работе [3], воспользовались тем, что  $\varphi_0(Z)$  - "гасящая" функция, и для функции  $f$  в  $\mathfrak{R}_3$  верна формула Коши-Сеге. Поэтому предельный переход под знаком интеграла здесь возможен в силу теоремы Лебега. Лемма 2 доказана.

Формула (3) восстанавливает значение функции  $f$  в точке 0 по ее значениям на  $E$ . Теперь с помощью этой формулы мы докажем формулу, восстанавливающую значение  $f$  в произвольной точке области  $T_n$ .

Обозначим  $\xi = (\xi^2, \dots, \xi^n) \in \Gamma_{n-1}$  и рассмотрим множество

$$E_{A,\xi} = \left\{ Z : Z \in E, \Phi_A^1(Z^1) = \theta, \Phi_A^j(\xi^j) = \begin{cases} \theta \Phi_A^j(\xi^j), & j = 2, n, \theta \in S_2 \end{cases} \right\}.$$

Это множество измеримо относительно меры  $\mu_1$  для почти всех  $A$  и  $\xi$ . Множество  $\{\xi : \xi \in \Gamma_{n-1}, \mu_1 E_{A,\xi} > 0\}$  обозначим через  $\tilde{E}_A$ . Очевидно, что  $E_{A,\xi} \times \tilde{E}_A = E$ . Из теоремы Фубини (см. [4]) следует, что  $\left( \frac{(m-1)(n-1)}{2} \right)_-$  мерная мера

Лебега этого множества положительна.

Аналогично предыдущему, введем вспомогательную функцию

$$\varphi_A = \exp \psi_A, \quad \psi_A(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{A^1, w^1} \frac{\eta + \lambda}{\eta - \lambda} \frac{d\eta}{\eta},$$

здесь

$$E_{A^1, w^1} = \left\{ \xi^1 \in E^1, \xi = (\Phi_A^1)^{-1} \left( \lambda (\Phi_A^1)^{-1}(w) \right), |\lambda| = 1 \right\},$$

$$W \in \Phi_A^1(SU(m)).$$

**Теорема 1.** Пусть  $f \in H^1(T_n)$ ,  $E \subset \Gamma_n$ ,  $\mu(E) > 0$ . Тогда для четного  $m$  и для любой точки  $A \in T_n$  верна формула Карлемана

$$f(A) = \frac{m}{\mu_{\frac{(m-1)(n-1)}{2}}(\Phi_A^{-1}(\tilde{E}_A))\mu(\Phi_A^{-1}(\tilde{E}_{A,\xi}))} \times$$

$$\times \lim_{l \rightarrow \infty} \int_E f(Z) \left[ \frac{\varphi_A(Z)}{\varphi_A(A)} \right]^l \prod_{j=1}^n H(A^j, \bar{Z}^j) d\mu(Z), \quad (4)$$

где

$$H(A^j, \bar{Z}^j) = \frac{1}{\det(I^{(m)} + A^j \bar{Z}^j)^{\frac{m-1}{2}}}$$

есть ядро Коши-Сеге для классической области третьего типа.

**Доказательство.** Для  $A=0$  утверждение теоремы доказано в лемме 3. Положим  $f_A(\xi) = f(\Phi_A^{-1}(\xi))$ , тогда  $f_A(0) = f(A)$ . Известно, что  $f_A \in H^1(T_n)$  (см.[2]). Применим к  $f_A$  лемму 3, а затем сделаем обратное преобразование. Тогда получим

$$f(A) = \frac{m}{\int_{\tilde{E}_A} d\mu_{\frac{(m-1)(n-1)}{2}}(\Phi_A^{-1}(\tilde{E}_A)) \int_{\tilde{E}_{A,\xi}} d\mu(\Phi_A^{-1}(\tilde{E}_{A,\xi}))} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_E f(\xi) \left[ \frac{\varphi_A(\xi)}{\varphi_A(A)} \right]^l d\mu(\Phi_A(\xi)). \quad (5)$$

Так как

$$d\mu(\Phi_A(\xi)) = |\det J(\xi, A)| d\mu(\xi),$$

где  $J(A, \xi)$  – матрица Якоби преобразования  $\Phi_A(Z)$ , и (см. [5])

$$|\det J(\xi, A)| = \frac{\prod_{j=1}^n H(A^j, \bar{\xi}^j) H(\xi^j, \bar{A}^j)}{\prod_{j=1}^n H(A^j, \bar{A}^j)},$$

то, применяя формулу (5) к функции  $f(\xi) \prod_{j=1}^n H^{-1}(\xi^j, \bar{A}^j) \in H^1(T_n)$ , получаем формулу (4).

Действительно,

$$f(A) \prod_{j=1}^n H^{-1}(A^j, \bar{A}^j) =$$

$$= \frac{m}{\int_{\tilde{E}_A} d\mu_{\frac{(m-1)(n-1)}{2}}(\Phi_A^{-1}(\tilde{E}_A)) \int_{\tilde{E}_{A,\xi}} d\mu(\Phi_A^{-1}(\tilde{E}_{A,\xi}))} \times \lim_{l \rightarrow \infty} \int_E f(\xi) \prod_{j=1}^n H^{-1}(\xi^j, \bar{A}^j) \left[ \frac{\varphi_A(\xi)}{\varphi_A(A)} \right]^l \frac{\prod_{j=1}^n H(A^j, \bar{\xi}^j) H(\xi^j, \bar{A}^j)}{\prod_{j=1}^n H(A^j, \bar{A}^j)} d\mu(\xi)$$

и отсюда мы получим

$$f(A) = \frac{m}{\mu_{\frac{(m-1)(n-1)}{2}}(\Phi_A^{-1}(\tilde{E}_A)) \mu(\Phi_A^{-1}(\tilde{E}_{A,\xi}))} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_E f(Z) \left[ \frac{\varphi_A(Z)}{\varphi_A(A)} \right]^l \prod_{j=1}^n H(A^j, \bar{Z}^j) d\mu(Z).$$

Теорема доказана.

**Теорема 2.** Пусть  $f \in H^1(T_n)$ ,  $E \subset \Gamma_n$ ,  $\mu(E) > 0$ . Тогда для нечетного  $m$  и для каждой точки  $A \in T_n$  справедлива формула Карлемана

$$f(A_1) = \frac{m}{\mu_{\frac{(m+1)(n-1)}{2}}(\Phi_A^{-1}(\tilde{E}_A)) \mu(\Phi_A^{-1}(\tilde{E}_{A,\xi}))} \times \lim_{l \rightarrow \infty} \int_E f(Z_1) \left[ \frac{\varphi_A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Z_1 \end{pmatrix}}{\varphi_A(A)} \right]^l \prod_{j=1}^n H(A^j, \bar{Z}^j) d\mu(Z),$$

где  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$  – матрица порядка  $(m+1)$ ,

$$\tilde{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & P \\ -P & Z_1 \end{pmatrix}, Z_1 \in E, P \in F \right\},$$

$F$  состоит из  $m$  – векторов, удовлетворяющих условиям

$$PP^* = 1, PZ_1^* = 1, P^*P + ZZ_1^* = I.$$

Доказательство проводится так же, как доказательство предыдущей теоремы 1.

## Литература

1. Айзенберг Л.А. Формулы Карлемана в комплексном анализе. –Новосибирск: «Наука», 1990. –С.248.
2. Айзенберг Л.А., Южаков А.П. Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. – Новосибирск: «Наука», 1979. –С. 366.
3. Кытманов А.М., Никитина Т.Н. Аналогии формулы Карлемана для классических областей. //Мат. Заметки. 1989. Т.45, №3, –С.87-93.
4. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. –М.: «Наука», 1974. –С.480.
5. Хуа Ло-кен. Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. –М.: Изд. иностр. лит., 1959. –С.163.
6. Khudayberganov G., Matyakubov Z.K. Carleman's formula for matrix upper half-planes // Acta NUUz, 2018, №2.1, pp. 8-14.
7. Shaimkulov B. A., Bozorov J.T. Carleman's Formula for a Matrix Polydisk//Journal of Siberian Federal University. Mathematics Physics. 2015. № 8(2). –P.371-374.
8. Rakhmonov U.S., Matyakubov Z.K. Carleman's formula for the matrix domains of Siegel. Chebishevskiy sbornik, 2022 y. Vol. 23. №. 4. DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-126-135.
9. Abdullayev J.Sh., Ruzmetov K.Sh., Matyakubov Z.K. Carleman's Integral Formula in Cartesian Product of Matrix Upper Half-Plane// Azerbaijan Journal of Mathematics V. 14, № 2, 2024, July ISSN 2218-6816 <https://doi.org/10.59849/2218-6816.2024.2.36>

**РЕЗЮМЕ.** Карлеман формуласи соҳасида голоморф ёки гармоник функцияларнинг қийматларини уларнинг ягоналик топламларидаги қийматлари орқали тиклаш имконини беради. Ушбу мақолада кососимметрик матрицалар учун бирлик полидоирада Карлеман формуласи исботланган.

**РЕЗЮМЕ.** Формула Карлемана позволяет восстанавливать значения голоморфных или гармонических функций в области по их значениям в множествах особенностей. В данной работе доказывается формула Карлемана об единичном поликруге для кососимметричных матриц.

**SUMMARY.** Carleman's formula allows one to reconstruct the values of holomorphic or harmonic functions in a domain from their values in sets of singularities. In this paper, we prove Carleman's formula on the unit polydisk for skew-symmetric matrices.