

ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАР ХӘМ ОЛАР АРАСЫНДАҒЫ ҚАТНАСЛАР

Т.Т.Калекеева – педагогика илимлері бойынша философия докторы

Әжанияз атындағы Нөкіс мәмлекеттік педагогикалық институты

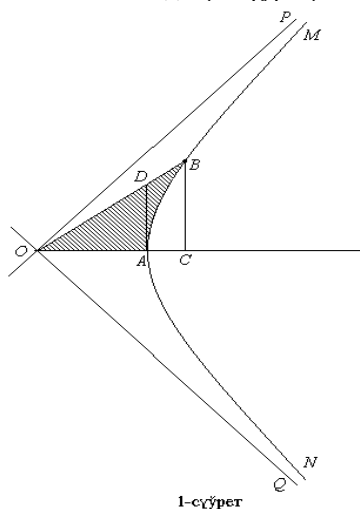
Таянч сұзлар: гиперболик функциялар, гиперболик синус, гиперболик косинус, гиперболик тангенс, гиперболик котангенс.

Ключевые слова: гиперболические функции, гиперболический синус, гиперболический косинус, гиперболический тангенс, гиперболический котангенс.

Key words: hyperbolic functions, hyperbolic sine, hyperbolic cosine, hyperbolic tangent, hyperbolic cotangent.

Гиперболалық функциялар теориясында гипербола үлкен рол ойнайды. Ол тригонометриялық функцияның теориясындағы шеңбердің ролин атқарады. Бір тармақлы тең тәрепли MAN (1-сұйрет) гиперболаны қараймыз. Оның асимптоталары OP хәм OQ лар гиперболаның орай болған O нокатында перпендикуляр болып кесилеседи.

Асимптоталардың мүйешинің OC биссектрисасы гиперболаның бас диаметрі, ал A нокат оның иймек сызық пенен кесиліскен нокаты болып, ол гиперболаның төбеси болып есапланады (1-сұйрет).



OA кесиндисин a деп белгілейміз, яғный $a = OA$. Бул кесинди гиперболаның орайы менен оның төбесін тутастырады. Усы кесиндини гиперболаның ярым көшери деп атаймыз.

Гиперболаның қалеген B нокатынан гиперболаның орайы O нокатына шекемгі аралық яғный OB кесиндиси усы B нокатындағы радиус векторы болып табылады.

Бір тәрепинен B нокатының радиус векторы, бір тәрепинен ярым көшер менен шегараланған ал қалған бөлегінде гипербола менен шегараланған тегіслик бөлеги (сұйретте штирхлап көрсетілген) усы B нокатына сәйкес келіуші гиперболалық сектор делинеди.

Егер B нокат гипербола бойынша қозғалса, гиперболалық сектор өседі. Бул ўақытларда ярым көшер хәм радиус векторлар арасындағы мүйештің шамасы үлкейіп барыуы керек. Хәкыйқатында да, егер B нокатын шексіз A нокатынан қашықтастырсақ, онда гиперболалық сектор тегіслик бөлегинің хәммесін яғный гипербола хәм оның асимптотасы аралығын өз ишине қамтыуға умтылады.

B нокатының пайда еткен гиперболалық секторының майданын екі еселеп гиперболаның ярым көшерінің квадратына қатнасын алсақ

$$\tau = \frac{2S}{a^2}$$

буны B нокаттың гиперболалық аргументі дейміз.

Гиперболаның теориясында гиперболалық аргумент тригонометриялық функцияның теориясында орайлық мүйеш ролин атқарады, радианлық өлшеми ақырғы болыуы мүмкін және дөңгелек сектордың екі еселенген майданының оның радиусына қатнасы көринисінде анықланады.

Шеңбердегі тригонометриялық функция сыяқлы гиперболалық функция да аналоглы анықланады.

Гиперболалық аргумент τ дың мәнісіне сәйкес келіуші гиперболадағы B нокатын қараймыз, бул нокаттан гиперболаның бас диаметріне BC перпендикуляр түсіреміз. Гиперболаның төбесінен бас диаметрге AD перпендикуляр жүргіземіз, буны B нокаттың радиус-векторы менен кесилісуіндегі D нокатына шекем дауам еттіреміз (1-сұйрет).

1. Тең тәрепли гиперболадан алынған B нокаттан оның бас диаметріне түсірілген BC перпендикуляр гиперболалық синус сызығы делинеди, бул сызықтың ұзындығының ярым көшердің ұзындығына қатнасын B нокатының жағдайына сәйкес келіуші гиперболалық аргументтің синусы деп атайды. Демек, бизде

$$\frac{BC}{OA} = \frac{BC}{a} = sh \tau.$$

2. Гиперболаның орайынан синус сызығы CB ға жүргізілген OC перпендикуляр гиперболалық косинус сызығы делинеди, ал бул сызықтың ұзындығының гиперболаның ярым көшерінің ұзындығына қатнасын B нокатының жағдайына сәйкес келіуші гиперболалық аргументтің гиперболалық косинусы деп атайды.

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OC}{a} = ch \tau.$$

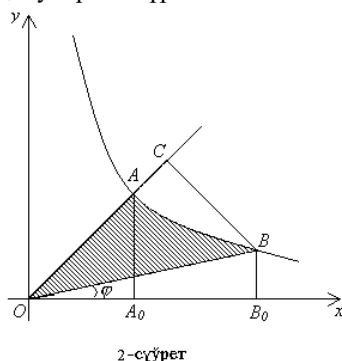
3. Гиперболаның төбесі A нокатынан гиперболаның B нокатының радиус векторы менен кесилісуіне шекем дауам еттіріу арқалы оның бас диаметріне AD перпендикуляр кесиндисін жүргіземіз. Бул сызық гиперболалық тангенс сызығы делинеди, ал бул сызықтың ұзындығының ярым көшерге қатнасын B нокатына сәйкес келіуші аргумент τ дың гиперболалық тангенсі деп атаймыз. Демек, AD кесинди, гиперболаның төбесі A нокатының оның бас диаметріне перпендикуляр, B нокатының радиус векторы менен кесилісуіне шекем дауам еттіреміз, бул сызық гиперболалық тангенс сызығы делинеди, ал бул сызықтың ұзындығының ярым көшерге қатнасын B нокатына сәйкес келіуші аргумент τ дың гиперболалық тангенсі деп атаймыз. Демек,

$$\frac{AD}{OA} = \frac{AD}{a} = th \tau.$$

Гиперболалық аргументтің мәнісі хәм оған сәйкес келіуші гиперболалық функция ярым көшердің өлшеміне ғәрезли болмайды, сонлықтан да оны анықлаушы барлық шамада өзгермей қалатуғынлығын көреміз.

Жоқарыда көрсетілген нәтижени есапқа алып, $ху = 1$ гиперболаны қараймыз (2-сұйрет). Бунда OC гиперболаның бас диаметрі. Гиперболаның төбесінің оң тармағынан B нокатын аламыз. Оның радиус век-

торы OB ны жүргіземіз. B нокатынан бас диаметрге BC перпендикулярын жүргіземіз.



2-сүрөт

2-сүрөттө көрсөтилген гиперболаның A төбөсинин координаталары $(1, 1)$ нокатында экенлигин есапка алсақ онда гиперболаның ярм көшери $OA = a = \sqrt{2}$ ге тең болады, B нокаттың гиперболаалық аргументи

$$\tau = \frac{2 \cdot \text{mayd.}(OBA)}{a^2} = \text{mayd.}(OBA),$$

ал оның функциясы

$$\text{sh } \tau = \frac{BC}{\sqrt{2}}$$

$$\text{ch } \tau = \frac{OC}{\sqrt{2}}$$

Егер радиус-вектор $OB = \rho$ хэм оның OX көшери менен жасаған мүйеши φ болса, онда B нокатының координаталары

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

OBC туўры мүйешли үшмүйешликте $\angle COB = 45^\circ - \varphi$ болады.

$$BC = \rho \sin(45^\circ - \varphi) = \rho \sin 45^\circ \cdot \cos \varphi - \cos 45^\circ \sin \varphi =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} (\rho \cos \varphi - \rho \sin \varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2} (x - y)$$

$$OC = \rho \cos(45^\circ - \varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2} (x + y)$$

ямаса

$$\text{sh } \tau = \frac{x - y}{2}$$

$$\text{ch } \tau = \frac{x + y}{2}$$

Енди $OABB_0$ фигура (2-сүрөт), яғный ярм көшер OA , B нокатының ординаты, Ox көшери хэм баска тәрәпинен гиперболаның AB иймеклиги менен шегараланған фигураның майданын қараймыз. Буны еки бөлекке бөлип қарауымыз мүмкин: гиперболаның төбеси A нокатының ординаты A_0A жәрдемінде хэм O нокатының радиус векторы OB жәрдемінде. Демек,

$$\begin{aligned} \text{mayd.}(OABB_0) &= \text{mayd.}(OAA_0) + \text{mayd.}(A_0ABB_0) = \\ &= \text{mayd.}(OB_0B) + \text{mayd.}(OBA) \end{aligned}$$

Бирак

$$\text{mayd.}(OAA_0) = \frac{1}{2} OA_0 \cdot A_0A = \frac{1}{2}$$

$$\text{mayd.}(OB_0B) = \frac{1}{2} x \cdot y = \frac{1}{2}$$

сонда

$$\tau = \text{mayd.}(OBA) = \text{mayd.}(A_0B_0BA)$$

Демек, гиперболаалық аргумент бул жағдайда гиперболаалық трапецияның майданына тең болатуғынлығы көринип тур. Демек, биз B точасының координаталарын

$$x = e^\tau, y = \frac{1}{e^\tau} = e^{-\tau}$$

көринисте алсақ төмендеги нәтижеге келемиз.

Гиперболаалық функция натурал көрсеткішли функциялар жәрдемінде өзлеринин аргументтери менен төмендегиге қатнаста болады.

$$\text{sh } \tau = \frac{e^\tau - e^{-\tau}}{2} \quad (1)$$

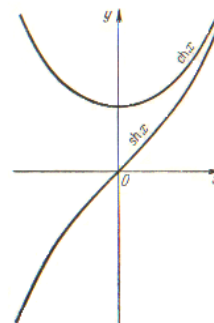
$$\text{ch } \tau = \frac{e^\tau + e^{-\tau}}{2} \quad (2)$$

Келип шыққан аңлатпа гиперболаалық функцияның хәр қыйлы қасиеттерин атап өтиўге мүмкиншилик береді. Усы формула аргументтиң терис мәнисіндеги функцияның мәнисин анықлаўға мүмкиншилик береді. Буның ушын геометриялық көз-қарастан бас диаметрдің төменинде жайласқан нокатларға сәйкес келиўши аргументти терис деп қабыллап алып кесиндилер ушын белгилердің қағыйдалары қолланылады. Соңынан төмендеги теңликке ийе боламыз:

$$\left. \begin{aligned} \text{sh}(-\tau) &= -\text{sh } \tau \\ \text{ch}(-\tau) &= \text{ch } \tau \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Буннан гиперболаалық синустың - тақ, ал гиперболаалық косинустың - жуп функция болатуғынлығын көремиз.

Бул еки функцияның графиги 3-сүрөттө көрсетілген.



3-сүрөт

Төмендеги таблицада бул функциялардың тийкаргы мәнислери көрсетілген.

τ	0	$+\infty$	$-\infty$
$\text{sh } \tau$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\text{ch } \tau$	-1	$+\infty$	$+\infty$

(1), (2) теңликлерди квадратқа көтерип бириншисин екіншисинен айырсақ, биз эпиўайы тийкаргы қатнас, яғный гиперболаалық функциялардың бирдей аргументке ийе болғандағы байланысына ийе боламыз

$$\text{ch}^2 \tau - \text{sh}^2 \tau = 1 \quad (4)$$

бул тригонометрияның төмендеги қатнасы менен аналоглы:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

Биз $\text{th } \tau$ функциясына айланып келемиз. 1-сүрөттө көрсетілген OAD хэм OCB үшмүйешликтердің ұқсаслығынан төмендегиге ийе боламыз

$$\frac{AD}{OA} = \frac{CB}{OC} = \frac{CB}{a} : \frac{OC}{a}$$

буннан

$$th \tau = \frac{sh \tau}{ch \tau} \quad (5)$$

ямаса

$$th \tau = \frac{e^{\tau} - e^{-\tau}}{e^{\tau} + e^{-\tau}} \quad (6)$$

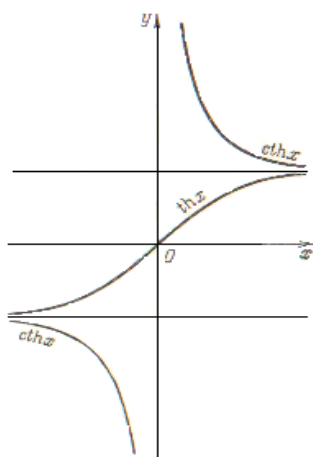
Гиперболалик котангенс функцияни қолайли кирийтиш ушун оның шартларин анықлайык.

$$cth \tau = \frac{1}{th \tau} \quad (7)$$

бул еки функция да так,

$$th(-\tau) = -th \tau; \quad cth(-\tau) = -cth \tau \quad (8)$$

бул функциялардың графиги 4-сүрөттө көрсетилген.



4-сүрөт

Төмөндеги таблицада олардың тийкаргы мәнислери көрсетилген.

τ	0	$+\infty$	$-\infty$
$th \tau$	0	1	-1
$cth \tau$	∞	1	-1

(4) хэм (5) ти салыстырамыз, биз және бирдейликке ийе боламыз

$$1 - th^2 \tau = \frac{1}{ch^2 \tau} \quad (9)$$

Тексерилип атырган функциялардың қосындысы хэм айырмасын қарастырып көремиз. (1) хэм (2) теңлемелерден

$$\left. \begin{aligned} e^{\tau} &= ch \tau + sh \tau \\ e^{-\tau} &= ch \tau - sh \tau \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

бул жерден еки хәр қыйлы мәнисли τ_1 хэм τ_2 аргументлер ушын төмендегиге ийе боламыз:

$$e^{\tau_1 \pm \tau_2} = e^{\tau_1} e^{\pm \tau_2} = (ch \tau_1 + sh \tau_1)(ch \tau_2 \pm sh \tau_2) = ch \tau_1 ch \tau_2 \pm sh \tau_1 sh \tau_2 + sh \tau_1 ch \tau_2 \pm ch \tau_1 sh \tau_2,$$

усыған аналоглы

$$e^{-(\tau_1 \pm \tau_2)} = ch \tau_1 ch \tau_2 \pm sh \tau_1 sh \tau_2 - (sh \tau_1 ch \tau_2 \pm ch \tau_1 sh \tau_2),$$

сонлықтан

$$sh(\tau_1 \pm \tau_2) = \frac{e^{\tau_1 \pm \tau_2} - e^{-(\tau_1 \pm \tau_2)}}{2}$$

$$ch(\tau_1 \pm \tau_2) = \frac{e^{\tau_1 \pm \tau_2} + e^{-(\tau_1 \pm \tau_2)}}{2}$$

ол ўақытта

$$sh(\tau_1 \pm \tau_2) = sh \tau_1 ch \tau_2 \pm ch \tau_1 sh \tau_2 \quad (11)$$

$$ch(\tau_1 \pm \tau_2) = ch \tau_1 ch \tau_2 \pm sh \tau_1 sh \tau_2 \quad (12)$$

Булардан төмендеги теңлик аңсат келип шығады

$$th(\tau_1 \pm \tau_2) = \frac{th \tau_1 \pm th \tau_2}{1 \pm th \tau_1 \cdot th \tau_2} \quad (13)$$

Булардан қос аргумент ушын төмендегини алыўымыз мүмкин

$$sh 2\tau = 2sh \tau \cdot ch \tau \quad (14)$$

$$ch 2\tau = ch^2 \tau + sh^2 \tau \quad (15)$$

$$th 2\tau = \frac{2th \tau}{1 + th^2 \tau} \quad (16)$$

Бул формулаларды ядта сақлап қалыў қыйын емес, себеби булардың барлығы эпийайы тригонометриялық формулалар менен аналоглы, тек ғана олар белгилери менен парқ қылады.

Жуўмаклап айтқанда, бул келтирилген түсиниклер тригонометрия курсың үйренген мектеп оқыўшылары, математика пәни оқытыўшылары, математика бағдарында билим алып атырган талабаларға хэм де өзбетинше математиканы үйрениўшилерге пайдалы болады деп ойлайман.

Әдебиятлар

1. Рашевский П.К. Риманова Геометрия и тензорный анализ. -М.: 1967.
2. Дубровин Б.А., Новиков С. П. Современная геометрия. -М.: 1979.
3. Норден А. П. Элементарное введение в геометрию Лобачевского. -М.: 1953.
4. Драйвер Р. Нега математика (перевод с английского языка). -Т.: «Фан», 1989.

РЕЗЮМЕ. Мақолада гиперболик функциялар, гиперболик функцияларнинг ҳосиласи, гиперболик функцияларнинг муносабати ва айрим хоссалари муҳокама қилинади.

РЕЗЮМЕ. В статье рассматриваются гиперболические функции, производная гиперболических функций, отношение и некоторые свойство гиперболических функций.

SUMMARY. The article discusses hyperbolic functions, the derivative of hyperbolic functions, the ratio and some properties of hyperbolic functions.