

# TÁBIYIY HÁM TEXNIKALIQ ILIMLER

Fizika.Matematika.Texnika.Informatika.

## ОЦЕНИВАНИЕ УСЛОВНОЙ ФУНКЦИИ ВЫЖИВАНИЯ В СПЕЦИАЛЬНОЙ РЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ СЛУЧАЙНОГО ЦЕНЗУРИРОВАНИЯ С ДВУХ СТОРОН

**Ф.Абдикаликов** – доктор философии по физико-математическим наукам

Институт математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан

Каракалпакский государственный университет имени Бердаха

**К.Бегжанова** – доктор философии по физико-математическим наукам

**Р.Сейтахов** – стажёр преподаватель

Каракалпакский государственный университет имени Бердаха

**Таянч сўзлар:** тасодифий цензурлаш, информатив модель, непараметрик регрессия, умр давомийлиги функцияси, ярим параметрик баҳо.

**Ключевые слова:** случайное цензурирование, информативная модель, непараметрическая регрессия, функция выживания, полупараметрическая оценка.

**Key words:** random censoring, informative model, nonparametrical regression, survival function, semiparametrical estimation.

Пусть интересующая нас случайная величина (с.в.)  $Z$ , означающая продолжительность жизни пациента находится под влиянием другой с.в.  $X$ , означающей дозу лекарства. В индустриальных опытах  $Z$  означает время безотказной работы технического устройства, а  $X$  – давление, температуру или напряжение. В таких практических ситуациях задача состоит в оценке функции выживания испытываемого объекта при заданном значении фактора влияния  $X$ . Однако, как правило, в таких случаях с.в.  $Z$  полностью ненаблюдаема и может быть цензурирована. Такую задачу впервые при случайном цензурировании справа рассматривал Беран [2], предложив оценку множительной структуры. В дальнейшем эта оценка была исследована также и в работах [5,6]. Авторы [1] построили и исследовали класс степенных оценок в моделях регрессии различных цензурированы. В настоящей работе рассматривается специальная модель информативного случайного цензурирования с двух сторон и в ней построена так же оценки степенной структуры. Рассмотрим ситуацию, когда с.в.  $Z$  подвергается случайному цензурированию с двух сторон с.в.  $Y_1$  и  $Y_2$ . Предполагается, что с.в.  $(Z, Y_1, Y_2)$  – независимы в совокупности при заданной  $X = x \in [0, 1]$ . Пусть  $\{(Z_i, Y_{1i}, Y_{2i}), i = \overline{1, n}\}$  – независимые реализации с.в.

$(Z, Y_1, Y_2)$  в  $n$  экспериментах и  $0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1$  – фиксированные точки дизайна  $X$ . Схема цензурирования такова, что в  $n$ -м шаге эксперимента наблюдается выборка  $S^{(n)} = \{(\xi_i, \delta_{0i}, \delta_{1i}, \delta_{2i}), i = \overline{1, n}\}$ , где

$\xi_i = \max\{Y_{1i}, \min(Z_i, Y_{2i})\}$ ,  $\delta_{0i} = I(\min(Z_i, Y_{2i}) < Y_{1i})$ ,  
 $\delta_{1i} = I(Y_{1i} \leq Z_i \leq Y_{2i})$ ,  $\delta_{2i} = I(L_i \leq Y_i < Z_i)$  и  $I(A)$  – индикатор события  $A$ . Пусть  $F_{x_i}$ ,  $G_{1x_i}$ ,  $G_{2x_i}$  и  $H_{x_i}$  –

условные функции распределения (ф.р.) с.в.  $Z_i$ ,  $Y_{1i}$ ,  $Y_{2i}$  и  $\xi_i$  при заданной  $X = x_i$  являются непрерывными. Далее для упрощения записей  $X_i$  обозначим через  $X$ .

Заметим, что с.в.  $Z_i$  наблюдаемы только при  $\delta_{1i} = 1$  и задача состоит в оценивании условной функции выживания  $1 - F_x$  по  $S^{(n)}$ . В настоящей работе рассматривается специальная информативной модель, т.е.  $F_x$ ,  $G_{1x}$  и  $G_{2x}$  удовлетворяют следующим представлениям при всех  $t \geq 0$ :

$$1 - G_{1x}(t) = (1 - F_x(t))^{\theta_1 + 1}, \quad 1 - G_{2x}(t) = (1 - F_x(t))^{\theta_2}, \quad (1)$$

где  $\theta_x$  – положительный неизвестный параметр. В данной специальной модели, ввиду условий (1) для  $1 - F_x$  имеет место следующее важное представление:

$$F_x(t) = 1 - \left[1 - (H_x(t))^{1/2}\right]^{\gamma_x}, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

где  $\gamma_x = \frac{1}{1 + \theta_x}$ . Следует отметить, что данная информативная модель, определяемая формулами (1), характеризуется тем, что формулы (1) эквивалентны независимости с.в.  $\xi_x$  и векторов  $(\delta_{0x}, \delta_{1x}, \delta_{2x})$ . Это свойство

играет важную роль при исследовании оценки  $1 - F_x$ . Для оценивания  $1 - F_x$  по формуле (2) сперва оценим  $H_x$  и  $\gamma_x$ . В свою очередь для оценивания  $H_x(t)$  и  $\{p_{mx} = P(\delta_{mx} = 1), m = 1, 2\}$  используем аналоги статистик Стоуна [4] с весами типа Гессера-Мюллера [3]:

$$H_{xh}(t) = \sum_{i=1}^n \omega_{ni}(x; h_n) I(\xi_i \leq t),$$

$$p_{mxh} = \sum_{i=1}^n \omega_{ni}(x; h_n) I(\delta_{mi} = 1), \quad m = 1, 2,$$

где

$$\omega_{ni}(x; h_n) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h_n} \pi\left(\frac{x-y}{h_n}\right) dy \left( \int_0^{x_n} \frac{1}{h_n} \pi\left(\frac{x-y}{h_n}\right) dy \right)^{-1}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Здесь  $x_0 = 0$ ,  $\pi$  – известная функция плотности и  $\{h_n\}$  – последовательность положительных постоянных такая, что  $h_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Используя представление (2), построим следующую оценку для  $1 - F_x$ :

$$1 - F_{xh}(t) = \left[1 - (H_{xh}(t))^{1/2}\right]^{\gamma_{xh}}, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

где  $\gamma_{xh} = 2p_{1xh}$  – оценка для  $\gamma_x = 2p_{1x}$ .

Переходим к исследованию асимптотических свойств оценки (3) при  $n \rightarrow \infty$ .

Далее нами будут использованы обозначения:  $\Delta_n = \min_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$ ,  $\bar{\Delta}_n = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$ ,

$$\|\pi\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \pi^2(y) dy, \quad m_v(\pi) = \int_{-\infty}^{\infty} y^v \pi(y) dy, \quad v = 1, 2.$$

Легко видеть, что ввиду условий (1) в рассматриваемой модели

$$T_{F_x} = T_{H_x} = \inf \{t \geq 0: H_x(t) = 1\},$$

$$\tau_{F_x} = \tau_{H_x} = \sup \{t \geq 0: H_x(t) = 0\}.$$

Рассмотрим условия:

$$(Y1) \quad \text{При } n \rightarrow \infty, \quad x_n \rightarrow 1, \quad \bar{\Delta}_n = O(n^{-1}),$$

$$\bar{\Delta}_n - \underline{\Delta}_n = o(n^{-1});$$

(Y2)  $\pi(y)$  - плотность с носителем  $[-M, M]$ , при некотором  $M > 0$ ,  $m_1(\pi) = 0$  и  $\pi$  удовлетворяет условию Липшица первого порядка;

$$(Y3) \quad \ddot{H}_x(t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_x(t), \quad H_x''(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} H_x(t),$$

$\dot{H}_x'(t) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} H_x(t)$  существуют и непрерывны для  $(t, x) \in [\tau, T] \times [0, 1]$ , где  $\tau_{H_x} < \tau < T < T_{H_x}$ ;

$$(Y4) \quad \ddot{p}_{mx} = \frac{d^2}{dx^2} p_{mx}, \quad m = 1, 2 \text{ существуют и непре-}$$

рывны для  $x \in [0, 1]$ .

Далее используем также обозначение  $r^{-1} = \sup_{\tau \leq t \leq T} [(H_x(t))^{1/2} - H_x(t)]^{-1}$ .

Имеет место свойство об асимптотическом представлении оценки (3) в виде взвешенной суммы с оценкой остаточного члена.

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия (Y1), (Y2), а для функций  $H_x$ ,  $p_{0x}$ ,  $p_{1x}$  условия (Y3), (Y4),  $r > 0$  и при  $n \rightarrow \infty$ ,  $h_n \rightarrow 0$ ,  $\frac{\ln n}{nh_n} = o(1)$ ,  $\frac{nh_n^5}{\ln n} = O(1)$ . Тогда для  $t \in [\tau, T]$ :

$$F_{xh}(t) - F_x(t) = \sum_{i=1}^n \omega_{ni}(x; h_n) \Psi_{ix}(\xi_i, \delta_{1i}, \delta_{2i}) + r_n(t, x), \quad (4)$$

где

$$\Psi_{ix}(\xi_i, \delta_{1i}, \delta_{2i}) = (1 - F_x(t)) \left\{ \frac{p_{1x}}{(H_x(t))^{1/2} - H_x(t)} (I(\xi_i \leq t) - H_x(t)) - \right. \\ \left. - 2 \log \left[ 1 - (H_x(t))^{1/2} \right] (\delta_{1i} - p_{1x}) \right\},$$

и при  $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{\tau \leq t \leq T} |r_n(t, x)| = O((nh_n)^{-1} \ln n). \quad (5)$$

**Доказательство.** Рассмотрим функцию  $y, z \in (0, 1)$ :

$f(y, z) = (1 - y^{1/2})^{2z}$ . Тогда  $1 - F_x = f(H_x, p_{1x}) = f_1$ ,  $1 - F_{xh} = f(H_{xh}, p_{1xh}) = f_h$ . Разложим  $f_h$  в ряд Тейлора второго порядка и тогда имеем

$$-(f_h - f_1) = \sum_{i=1}^n \omega_{ni}(x; h_n) \Psi_{ix}(\xi_i, \delta_{1i}, \delta_{2i}) + r_n(t; x). \quad (6)$$

Здесь при

$$(y, z) = (H_{xh}(t), p_{1xh}),$$

$$(y_0, z_0) = (H_x(t), p_{1x})$$

$$r(t, x) = \frac{1}{2} [f_{yy}'' \cdot (y - y_0)^2 + f_{zz}'' \cdot (z - z_0)^2] + f_{yz}'' \cdot (y - y_0)(z - z_0),$$

где  $f_{yz}'' = f_{zy}''$ . При этом производные вычислены в промежуточной точке  $(y_*, z_*) = (H_*(t), p_{1*})$  и поскольку они имеют довольно громоздкие формулы, здесь они не приводятся. Оценивая все эти производные второго

порядка применив неравенство  $0 < u \leq 1, \alpha, \gamma > 0$ :

$0 \leq u^\gamma |\log u|^\alpha \leq \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) e^{-\alpha}$ , из формулы (6) будем иметь

$$\sup_{\tau \leq t \leq T} |r_n(t, x)| = \sum_{l=1}^3 r_{ln}, \quad (7)$$

где

$$r_{1n} = O\left(\left(\sup_{\tau \leq t \leq T} |H_{xh}(t) - H_x(t)|\right)^2\right), \quad r_{2n} = O((p_{1xh} - p_{1x})^2),$$

$$r_{3n} = O\left(|p_{1xh} - p_{1x}| \sup_{\tau \leq t \leq T} |H_{xh}(t) - H_x(t)|\right).$$

Согласно лемме A.4(b) из [5]:

$$\sup_{\tau \leq t \leq T} |H_{xh}(t) - H_x(t)| = O((nh_n)^{-1/2} (\ln n)^{1/2}), \quad (8)$$

$$|p_{1xh} - p_{1x}| = O((nh_n)^{-1/2} (\ln n)^{1/2}).$$

Подставив оценки (8) в (7), получаем (5). Теорема 1 доказана.

**Следствие 1.** В условиях теоремы 1 следует равномерно сильная состоятельность оценки (3) при  $n \rightarrow \infty$ :

$$\sup_{\tau \leq t \leq T} |F_{xh}(t) - F_x(t)| = O((nh_n)^{-1/2} (\ln n)^{1/2}).$$

**Следствие 2.** Из теоремы 1 при достаточно больших  $n$  следует, что  $(nh_n)^{1/2} (F_{xh}(t) - F_x(t))$  аппроксимируется суммой в (4) умноженной на  $(nh_n)^{1/2}$  со скоростью сходимости  $(nh_n)^{-1/2} \ln n$ .

С учетом следствия 2 установим асимптотическую нормальность оценок (3).

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия (Y1), (Y2), а функции  $H_x$ ,  $p_{0x}$ ,  $p_{1x}$  удовлетворяют условиям (Y3), (Y4) и  $r > 0$ . Тогда

(A) Если  $nh_n^5 = o(1)$  и  $(nh_n)^{-1/2} \ln n = o(1)$ , тогда при  $n \rightarrow \infty$  и  $t \in [\tau, T]$

$$(nh_n)^{1/2} (F_{xh}(t) - F_x(t)) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_x^2(t)). \quad (9)$$

(B) Если  $h_n = Cn^{-1/5}$  при некотором  $C > 0$ , тогда при  $n \rightarrow \infty$  и  $t \in [\tau, T]$

$$(nh_n)^{1/2} (F_{xh}(t) - F_x(t)) \xrightarrow{d} N(a_x(t), \sigma_x^2(t)),$$

где

$$a_x(t) = \frac{1}{2} (1 - F_x(t)) \{A_x(t) \ddot{H}_x(t) - B_x(t) \ddot{p}_{1x}\} m_2(\pi) C^{5/2},$$

$$\sigma_x^2(t) = \|\pi\|_2^2 (1 - F_x(t))^2 \{A_x^2(t) H_x(t) (1 - H_x(t)) + B_x^2(t) p_{1x} (1 - p_{1x})\},$$

$$A_x(t) = \frac{p_{1x}}{(H_x(t))^{1/2} - H_x(t)}, \quad B_x(t) = 2 \log \left[ 1 - (H_x(t))^{1/2} \right].$$

**Доказательство.** Сначала, вычислим математическое ожидание главного члена выражения (4)

$$\sum_{i=1}^n \omega_{ni}(x; h_n) M \Psi_{ix}(\xi_i, \delta_{1i}, \delta_{2i}) =$$

$$= (1 - F_x(t)) \left\{ \frac{p_{1x}}{(H_x(t))^{1/2} - H_x(t)} \sum_{i=1}^n \omega_{ni}(x; h_n) (H_{xi}(t) - H_x(t)) - \right.$$

$$\left. - 2 \log \left[ 1 - (H_x(t))^{1/2} \right] \sum_{i=1}^n \omega_{ni}(x; h_n) (p_{1xi} - p_{1x}) \right\}. \quad (10)$$

Тогда, согласно лемме A.1(b) из [5], при  $n \rightarrow \infty$

$$(nh_n)^{1/2} \sum_{i=1}^n \omega_{ni}(x, h_n) M \Psi_{ix}(\xi_i, \delta_{1i}, \delta_{2i}) = a_x(t)(nh_n^5)^{1/2} + o((nh_n^5)^{1/2}) +$$

$$+ O((n^{-1}h_n)^{1/2}) + O((nh_n)^{-1/2} \ln n) = \begin{cases} o(1), & \text{при условиях (A),} \\ a_x(t)C^{5/2}, & \text{при условиях (B),} \end{cases}$$

так что достаточно показать (9). Учитывая независимость  $H_{xh}(t)$  и  $p_{1xh}$ , используя лемму 3.1 в [5], можно показать, что

$$D \left\{ \sum_{i=1}^n \omega_{ni}(x, h_n) \Psi_{ix}(\xi_i, \delta_{1i}, \delta_{2i}) \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \omega_{ni}^2(x, h_n) D \Psi_{ix}(\xi_i, \delta_{1i}, \delta_{2i}) =$$

$$= (1 - F_x(t))^2 \left\{ A_x^2(t) \left[ \frac{\|\pi\|_2^2}{nh_n} H_x(t)(1 - H_x(t)) + o\left(\frac{1}{nh_n}\right) \right] + \right. \quad (11)$$

$$\left. + B_x^2(t) \left[ \frac{\|\pi\|_2^2}{nh_n} p_x^{(1)}(1 - p_x^{(1)}) + o\left(\frac{1}{nh_n}\right) \right] \right\} = \frac{\sigma_x^2(t)}{nh_n} + o\left(\frac{1}{nh_n}\right).$$

Проверим условие Ляпунова для последовательности  $(nh_n)^{1/2} \sum_{i=1}^n \omega_{ni}(x, h_n) (\Psi_{ix}(\cdot) - M \Psi_{ix}(\cdot))$ , т.е. при  $n \rightarrow \infty$  условие

$$\frac{\sum_{i=1}^n \omega_{ni}^3(x, h_n) M |\Psi_{ix}(\cdot) - M \Psi_{ix}(\cdot)|^3}{\left\{ D \left[ \sum_{i=1}^n \omega_{ni}(x, h_n) \Psi_{ix}(\cdot) \right] \right\}^{3/2}} = o(1). \quad (12)$$

Легко показать, что числитель дроби (12) имеет порядок  $O((nh_n)^{-2})$ , а знаменатель же согласно (11) имеет порядок  $O((nh_n)^{-3/2})$ . Следовательно дробь (12) имеет порядок  $O((nh_n)^{-1/2}) = o(1)$ , при  $n \rightarrow \infty$ , что доказывает теорему 2. Теорема 2 доказана.

### Литература

1. Абдушукуров А.А., Абдикаликов Ф.А. Исследования степенных оценок функций выживания в моделях регрессии. LAMBERT Academic Publishing. 2012. -С.89.
2. Beran R. Nonparametric regression with randomly censored survival data. Technical Report. Univ. California. Berkeley. – 1981. – 19p.
3. Gasser T., Müller H.G. Kernel estimation of regression function. Lecture Notes in Mathematics. Springer. New York. – 1977.
4. Stone C.J. Consistent nonparametric regression. //Ann. Statist. – 1977. – Vol. 5. – P.595-645.
5. Van Keilegom I., Veraverbeke N. Estimation and bootstrap with censored data in fixed design nonparametric regression. // Ann. Inst. Statist. Math. –1997. – Vol. 49. - №3. – P.467-491.
6. Veraverbeke N., Cadarso-Suares C. Estimation of the conditional distribution in a conditional Koziol-Green model. // Test. – 2000. – Vol.9. - №1. – P. 97-122.

**РЕЗЮМЕ.** Маколада икки томондан тасодифий цензуруланишнинг махсус информатив регрессия моделида шартли умр давомийлиги функциясининг ярим параметрли баҳоси тузилади. Ушбу баҳонинг асимптомик хоссалари ўрганилди.

**РЕЗЮМЕ.** В данной статье построена полупараметрическая оценка условной функции выживания в специальной информативной регрессионной модели случайного цензурирования с двух сторон. Исследованы асимптотические свойства этой оценки.

**SUMMARY.** In the article constructs a semiparametric estimate of the conditional survival function in a special informative regression model of random censoring on both sides. The asymptotic properties of estimators are investigated.

## МОЛЕКУЛЯРНО-ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОЛИМЕРНЫХ НАНОКОМПОЗИТОВ

С.У.Аширбекова – кандидат технических наук

Нукусский государственный педагогический институт имени Ажинияза

**Таянч сўзлар:** полимер матрицаси, нанотехнология, наноккомпозитлар, молекуляр динамика моделлари, тузилиш, хоссалар, нанозаррача, таксимот.

**Ключевые слова:** полимерная матрица, нанотехнология, наноккомпозиты, молекулярно-динамические модели, структура, свойства, наночастица, распределение.

**Key words:** polymer matrix, nanotechnology, nanocomposites, molecular dynamics models, structure, properties, nanoparticle, distribution.

**Введение.** Наноккомпозиты представляют собой материалы, в которых одна или несколько фаз имеют размеры в диапазоне от нескольких нанометров до нескольких микрометров. Эти материалы обладают уникальными механическими, электрическими, термическими и химическими свойствами, что делает их перспективными для широкого спектра приложений, включая электронику, медицину, энергетику и другие отрасли.

Нанотехнологии стали ключевым фактором в развитии современных материалов, открывая перед нами возможности создания новых композитов с уникальными свойствами. Одним из важных аспектов в изучении наноккомпозитов является теоретическое понимание их структуры. Структура наноккомпозитов, включая распределение наночастиц в матрице и характер взаимодействия между компонентами, играет решающую роль в определении их механических, теплофизических, электрических и магнитных свойств [1, 2].

**Основная часть** В современном контексте, где требуется разработка инновационных материалов с уникальными свойствами для решения сложных технологических и научных задач, исследование структуры наноккомпозитов становится актуальной и перспектив-

ной областью научных исследований.

В исследованиях наноккомпозитов предложено множество теоретических моделей, описывающих их структуру. Эти модели помогают понять взаимодействие наночастиц с матрицей и предсказать свойства композитного материала [3-5]. Среди которых молекулярно-динамические (MD) модели являются мощным инструментом для изучения структуры и свойств наноккомпозитов на молекулярном уровне. В этих моделях атомы и молекулы материала описываются в пространстве и времени с использованием уравнений движения Ньютона.

Молекулярно-динамические модели (МДМ) являются вычислительными методами, которые позволяют исследовать динамику атомов и молекул в системах на молекулярном уровне. Применение МДМ в исследованиях наноккомпозитов позволяет углубленно изучать их структуру, взаимодействие фаз и изменение свойств в зависимости от условий.

Одним из ключевых аспектов использования МДМ в изучении наноккомпозитов является способность моделировать влияние различных факторов, таких как температура, давление и концентрация компонентов, на структуру материала. Это помогает предсказать изме-