ИЗОМЕТРИИ *LOG*-АЛГЕБР И ИХ ВЗАИМОСВЯЗЬ С РАЗЛИЧНЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ, ПОСТРОЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО Σ-КОНЕЧНЫХ МЕР

Р.З.Абдуллаев – *доктор физико-математических наук, профессор*
Ташкентский университет информационных технологии имени Мухаммада Ал-Хоразмий
М.Абдимуратов – *магистрант*
Ф.Узакбаева – *магистрант*
Нукусский государственный педагогический институт имени Ажинияза

Таянч сўзлар: изометриялар, лог-алгебралар, с-чекланган ўлчовлар, Аренс алгебралари, F -фазолар.
Ключевые слова: изометрии, log-алгебры, σ-конечные меры, алгебры Аренса, F-пространства.
Key words: isometries, log-algebras, σ-finite measures, Arens algebras, F-spaces.

Интегрируемость функций на отрезке [0,1] с p-ой степенью определяет скорость роста функций, т.е. скорость роста больше у тех функций у которых меньше степень их интегрируемости (наименьшая степень $p\in(0,\infty)$, с которой интегрируема функция). Очевидно, имеют место следующие включения $L_\infty \subset L_p \subset L_q$, $\infty > p > q > 0$, где L_p это пространства интегрируемые с p-степенью и L_∞ это алгебра существенно ограниченных функций на отрезке $[0,1]$.

В работе [1], были введены алгебры *log*-интегрируемых функций L_{log} и изучены их свойства. В частности, было показано, что такая алгебра является полным метрическим пространством. Из неравенства $log(|f(z)|) \le |f(z)|^p$ получаем $L_p \subset L_{log}$, для $p\in(0,\infty)$.

Пусть $S(X,\mu)$- алгебра измеримых функций на измеримом пространстве (X,μ) с σ-конечных мерой μ. Рассмотрим пространство

$$L_p(X,\mu)=\left\{f\in S(X,\mu):\int_X |f(x)|^p d\mu<\infty\right\}$$

и функционал $\|f\|_p=\left(\int\limits_X |f(x)|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ является нормой на $L_p(X,\mu)$ в случае $p\in(1,\infty)$. Из курса функционального анализа известно, что $L_p(X,\mu)$ является полным линейным пространством, т.е. баноховым пространством относительно нормы $\|\bullet\|_p$. Рассмотрим множество (аренс 2)

$$L^w(X,\mu)=\left\{f\in S(X,\mu):\int\limits_X |f(x)|^p\,d\mu<\infty,\forall p\in[1,\infty)\right\}=$$
$$=\cap_{1<p<\infty} L_p(X,\mu).$$

$L^w(X,\mu)$ является метрическим пространством относительно метрики, порожденной системой полунорм $\{\|\bullet\|_p\}\ p\in[1,\infty)$. Также рассмотрим множества

$$L_0^w(X,\mu)=\cap_{0<p<\infty} L_p(X,\mu) \text{ и}$$
$$L^u(X,\mu)=\cup_{1<p<\infty} L_p(X,\mu).$$

Следующее множество введено и изучено в [1].

$$L_{log}(X,\mu)=\left\{f\in S(X,\mu):\int\limits_X \log(1+|f(x)|d\mu<\infty\right\}$$

является F-пространством относительно F-нормы $f_{log}=\int\limits_X \log(1+|f(x)|d\mu$. Эти пространства рассмотрены в работах [3-7].

Теорема 1. Пусть μ конечная мера. Тогда (*i*) $L_q(X,\mu)\subset L_p(X,\mu)$, при $0<p<q<\infty$; (*ii*) $L_0^w(X,\mu)$- является алгеброй; (*iii*) $L_0^w(X,\mu)=L^w(X,\mu)$; (*iv*) $L_\infty(X,\mu)\neq L_0^w(X,\mu)$.

Доказательство. Пусть дана положительная функция $f\in L_q(X,\mu)$. Тогда f можно представить в виде суммы двух функций.

(i) Пусть f произвольная функция из $L_q(X,\mu)$. Не ограничивая общности можно считать ее положительной. Тогда f можно представить в виде суммы двух

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x), & x\in X_1,\\ 0, & x\in X_2\end{cases}\quad f_2(x)=\begin{cases} 0, & x\in X_1,\\ f(x), & x\in X_2\end{cases}$$

где $X_1=\{x\in X: f(x)>1\}$, $X_2=\{x\in X: f(x)\le 1\}$ так как $f\in L_q(X,\mu)$, то $\int\limits_x |f(x)|^q\,d\mu<\infty$. Тогда в силу положительности f и очевидных неравенств для $p>q>0$ имеем

$$\int\limits_X f^p(x)d\mu=\int\limits_{X_1} f_1^p(x)d\mu+\int\limits_{X_2} f_2^p(x)d\mu>$$
$$>\int\limits_{X_1} f_1^q(x)d\mu+\int\limits_{X_2} f_2^q(x)d\mu=\int\limits_X f^q(x)d\mu$$

Следовательно $f\in L_p(X,\mu)$ т.е. $L_q(X,\mu)\subset L_p(X,\mu)$.

(ii) Пусть $f,g\in L^\omega(X,\mu)$. Тогда $f\in L_p(X,\mu)$, и $g\in L_q(X,\mu)$ для всех $p,q\in(0,\infty)$. Из (i) следует, что p и q можно выбрать больше единицы. Тогда из неравенства $\|fg\|_r\le\|f\|_p\|g\|_q$ имеем, что $f\cdot g\in L_r(X,\mu)$ для любого $r\in[1,\infty)$. Следовательно, $L_0^\omega(X,\mu)$- алгебра

(*iii*) $L_0^\omega(X,\mu)=L^\omega(X,\mu)$, т.к. $L_q(X,\mu)\subset L_p(X,\mu)$ при $0<p<q<\infty$.

(iv) для доказательства (iv) необходимо предъявить неограниченную функцию интегрируемую в любой степени $p\in(0,\infty)$. Такой функцией будет функция $f(x)=|\log x|$.

(v). Выполнение этого включения следует из того, что существует не ограниченная функция интегрируема в любой степени.

Теорема 2. Имеют место следующие утверждения: (i) $L^u(X,\mu)$ - является алгеброй; (*ii*) $L^u(X,\mu)\subset L_{\log}(X,\mu)$; (*iii*) $L^u(X,\mu)\neq L_{\log}(X,\mu)$.

Доказательство. (i). Сначала покажем замкнутость $L^u(X,\mu)$ относительно возведения в квадрат.

Пусть $f \in L^u(X,\mu)$, тогда $\int_X |f(x)|^p \, d\mu < \infty$ для некоторого $p \in (0,\infty)$. Отсюда следует

$\int_X \left(|f^2(x)|\right)^{\frac{p}{2}} d\mu < \infty$, т.е. $f^2 \in L_{\frac{p}{2}}(X,\mu) \subset L^u(X,\mu)$.

Пусть теперь $f, g \in L^u(X,\mu)$, тогда

$$f \cdot g = \frac{f^2 + g^2 - (f-g)^2}{2} \in L^u(X,\mu).$$

$f \cdot g \in L^u(X,\mu)$. Следовательно $L^u(X,\mu)$ замкнуто относительно умножения.

(ii). Не ограничивая общности можно считать что $X = [0,1]$. Пусть $f \in L^u(X,\mu)$, т.е. $f \in L_p(X,\mu)$ для некоторого $p \in (0,\infty)$. Следовательно $1 + |f| \in L_p(X,\mu)$. Тогда из неравенства $\log t \le t^p / p$ имеем

$\int_0^1 \log\left(1 + |f(x)|\right) dx \le \frac{1}{p} \int_0^1 \left(1 + |f(x)|\right)^p dx < \infty$, т.е.

$$f \in L_{\log}(X,\mu).$$

(iii). Не ограничивая общности можно считать что $X = [0,1]$. Функция $e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \in L_{\log}(X,\mu)$ и $e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \notin L^u(X,\mu)$. Действительно $\int_0^1 \log e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \infty$, т.е. $e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \in L_{\log}(X,\mu)$. Далее для любого $p \in (0,\infty)$ имеем $\int_0^1 e^{\frac{p}{\sqrt{x}}} dx \ge \int_0^1 \frac{p}{2x} dx = \infty$. Следовательно $L^u(X,\mu) \ne L_{\log}(X,\mu)$.

Итак, для конечных мер верны следующее включения

$$L_\infty \subset L_0^\omega \subset L_p \subset L_q \subset L_\infty^u \subset L_{\log},$$

где $p \in [0,\infty)$. Теперь рассмотрим функциональные пространства $L_0^\omega, L_p, L^\omega, L_{\log}$ на полуоси $[0,\infty)$. Через F обозначим финитные функции на $([0,\infty),\mu)$, т.е. все те измеримые функций f на $([0,\infty),\mu)$, для которых $\mu\left(\{x \in [0,\infty) : f(x) \ne 0\}\right) < \infty$. Пересечение любого подпространства L из алгебры измеримых функций S $[0,\infty)$ с алгеброй $L_\infty[0,\infty)$ будем обозначать $(L)_b$.

Теорема 3. Имеют место следующие строгие включения:

$(F)_b \subset (L_0^w)_b \subset (L_t)_b \subset (L_s)_b \subset (L_1)_b \subset (L_{log})_b \subset (L_p)_b \subset (L_q)_b \subset (L^u)_b$

Доказательство. $|f|^p > |f|^q$ верного для $f \in L_\infty$ и $\log(1+|x|) \le x$ верно для $x \in [0,\infty)$. Все остальные включения очевидны. Отметим также, что все эти включения строгие. Действительно, функция

$$f(x) = \begin{cases} (1/x)^{\frac{1}{p}}, & x \in [1,\infty) \\ 1, & x \in [0,1) \end{cases}$$

Не интегрируема в p-ой степени, но интегрируема в степени q.

$$f(x) = \begin{cases} n, & x \in \left[n, n + 1/n^2\right),\ n = 1,2\ldots \\ 0, & x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[n, n + 1/n^2\right] \end{cases}.$$

Тогда

$\int_0^\infty f(x) dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{n}{n^2} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = \infty,$

т.е. $f \notin (L_1)_b$. Но из соотношений

$\int_0^\infty \left(1 + f(x)\right) dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{\log(1+n)}{n^2} < \infty,$

следует, что $f \in (L_{log})_b$. Чтобы доказать строгость первого включения необходимо предъявить ограниченную функцию f не равную нулю [0, ∞) и интегрируемую в любой степени $p \in (0,\infty)$. Такой функцией будет $f(x) = e^{-x}$. Эта функция не принадлежит $(F)_b$, так как ее $\mu(\{f\} \ne 0)$.

Приведем определение понятия паспорта булевой алгебры из [10]. Пусть X – произвольная полная булева алгебра, $e \in X$, $X_e = [0,e] = \{g \in X : g \le e\}$. Через $\tau(X_e)$ обозначим минимальную мощность множества, плотного в X_e в (o)-топологий. Бесконечная полная булева алгебра X называется однородной, если $\tau(X_e) = \tau(X_g)$ для любых ненулевых $e, g \in X$. Мощность $\tau(X) = \tau(X_1)$ где 1-единицы булевой алгебры X, называется весом однородной булевой алгебры X.

Введем теперь понятие паспорта для булевых алгебр с σ-конечной мерой. Пусть X -полная не атомическая булева алгебра и μ-строго положительная счетно-аддитивная σ-конечная мера на X. Тогда на X существует существенно положительная квазимера. Следовательно X является булевой алгеброй счетного типа и разложение ее на однородные компоненты не более чем счётно. Обозначим через X_{s_i} однородные компоненты булевой алгебры X для которых

$\tau_{s_i} = \tau(X_{s_i}) < \tau_{s_{i+1}}, \mu(s_i) = \infty,$

а через $\{X_{u_i}\}$ – однородные компоненты булевой алгебры X, для которых вес $\tau_{u_i} = \tau(X_{u_i}) < \tau_{u_{i+1}}, \mu_i = \mu(u_i) < \infty, i = 1,2,\ldots$ Тогда однозначно определена матрица

$$\begin{pmatrix} \tau_{s_1} & \tau_{s_2} & \ldots \\ \tau_{u_1} & \tau_{u_2} & \ldots \\ \mu_1 & \mu_2 & \ldots \end{pmatrix},$$

которую назовем паспортом булевой алгебры X с σ-конечной мерой μ. В случае конечных мер получим определение паспорта нормированной булевой алгебры, введенное в [8:273].

Следующая теорема нам понадобиться при изучении изоморфизмов алгерб Аренса.

Пусть X и Y – булева алгебры с σ-конечными мерами μ и ν соответственно. Обозначим через

$$\begin{pmatrix} \tau_{s_1} & \tau_{s_2} & \ldots \\ \tau_{u_1} & \tau_{u_2} & \ldots \\ \mu_1 & \mu_2 & \ldots \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} \tau_{t_1} & \tau_{t_2} & \ldots \\ \tau_{v_1} & \tau_{v_2} & \ldots \\ \nu_1 & \nu_2 & \ldots \end{pmatrix},$$

паспорта булевых алгебр (X,μ) и (Y,ν) соответственно.

Теорема 4. [10] Следующие условия эквивалентны: *(i)* существует изоморфизм φ из булевой алгебры (X,μ) на булеву алгебру (Y,ν) такой, что $\mu(x)=\nu(\varphi x)$ для любого $x\in X$. *(ii)* паспорта булевых алгебр (X,μ) и (Y,ν) совпадают.

Далее рассмотрим некоммутативные алгебры построенные на алгебрах фон Неймана. Все необходимые обозначения и результаты теории алгебры фон Неймана взята из [8], теории некоммутативного интегрирования из [5].

Пусть M алгебра фон Неймана с точным нормальным полуконечным следом τ. Через $L_0(M,\tau)$ обозначим измеримые операторы, присоединенные к M. Рассмотрим пространство

$$L_{log}(M,\tau)=\{T\in L_0(M,\tau):\ \tau(\log(1+|T|)<\infty\}$$

в смысле [1]. $L_{log}(M,\tau)$ является F-пространством относительно F-нормы

$$T_{log}=\int_0^1 log(1+\mu_x(T))dx$$

в случае конечного τ и

$$T_{log}=\int_0^\infty \log(1+\mu_x(T))^{dx}$$

в случае полуконечного τ, где $\mu_x(T)$ перестановка оператора T.

Определение. Алгеброй фон Неймана типа I_2 называется алгебра фон Неймана M, имеющая представление

$M=L_\infty(X)\otimes B(H_2)$, где H_2 – 2×2 матрица [8].

Для этих алгебр фон Неймана *log*-алгебра будет иметь вид

$$M_{log}(M,\tau)=L_{log}(X,\mu)\otimes B(H_2).$$

Пусть M и N алгебры фон Неймана типа I_2 с точными нормальными полу конечными следами τ_1 и τ_2 соответственно. Введем обозначения

$$L_{log}(M,\tau_1)=L_{log}(X,\mu)\otimes B(H_2),$$
$$L_{log}(N,\tau_2)=L_{log}(Y,\nu)\otimes B(H_2).$$

Теорема 5. Следующие условия эквивалентны: F-пространства $L_{log}(M,\tau_1)$ и $L_{log}(N,\tau_2)$ изометричны; F-пространства $L_{log}(X,\mu)$ и $L_{log}(Y,\nu)$ изометричны; Паспорта булевых алгебр (X,μ) и (Y,ν) совпадают.

Доказательство. (i)-(ii) верно в силу конечномерности $B(H_2)$. (i)-(ii) следует из [6].

Литература

1. Dykema K., Sukochev F., Zanin D. Algebras of log-integrable functions and operators. //Journal Complex Anal. Oper. Theory 10, 8. 2016, –P. 1775–1787.
2. Abdullaev R. Isomorphisms of Arens algebra of type I. Rendiconti Seminario Facolta Scienze Universita Cagliari Vol.68 Fascicolo Unico (1998), -P. 27-36.
3. Абдуллаев Р., Мадаминов Б.. Критерий изоморфности *log*-интегрируемых алгебр. //Узбекский математический журнал. –2017. №1. –С. 3-9. (01.00.00; №6).
4. Abdullaev R., Chilin V., Madaminov B. Isometric F-spaces of *log*-integrable function. //Siberian Electronic Mathematical Reports. 2020, T. 17. –P. 218-226.
5. Abdullaev R., Madaminov B.Isomorphisms and isometries of *F*-spaces of log-integrable measurable functions. //Uzbek Mathematical Journal. 2022. Vol. 66(1). –P. 5-13. (01.00.00; №6).
6. Abdullaev R.Z., Chilin V. Isomorphic Classification of *-Algebras of log-Integrable Measurable Functions.//Algebra, Complex Analysis, and Pluripotential Theory. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 264. USUZCAMP 2017. –P.73-83.
7. Abdullaev R.Z., Chilin V.I. Arens algebras, associated with commutative von Neumann algebras.//Ann.Math.Blaise Pascal, Vol. 5, 1998 №.1.
8. Takesaki M. Theory of operator algebras. I. -New-York: Heidelberg Berlin: Springer, 1979, XII+415.
9. Yeadon F.J. Non-commutative L_p spaces. Math. Proc. Cambridge Phil.,Soc., 1975, v. 77, n. 1 -P. 91-102.
10. Vladimirov D.A. Boolean Algebras in Analysis.//Mathematics and its Applications, 540, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.

РЕЗЮМЕ. Мақолада лог-алгебралар ва σ-чекли ўлчовлар бўйича тузилган интеграллашувчи функцияларнинг турли фазолари ўртасида боғланиш ўрнатилади. Шунингдек, биз $И_2$ турдаги фон Нейман алгебраларида лог-алгебраларнинг изометрияларини ўрганамиз.

РЕЗЮМЕ. В работе устанавливается связь между log-алгебрами и различными пространствами интегрируемых функций, построенных относительно σ-конечных мер. Также изучаются изометрии log-алгебр на алгебрах фон Неймана типа I_2.

SUMMARY. The paper establishes a connection between log-algebras and various spaces of integrable functions constructed with respect to σ-finite measures. We also study isometries of log-algebras on von Neumann algebras of type I_2.

KUPRATLAR PARDALARIDA POLARON MASSASI: PARDA QALINLIGI SAMARASI

D.G‘.Xajibayev – *tayanch doktorant*
B.Ya.Yavidov – *fizika-matematika fanlari doktori, dotsent*
Ajiniyoz nomidagi Nukus davlat pedagogika instituti

Tayanch so‘zlar: kupratlar, pardalar, parda qalinligi, kichik polaron, polaron massasi.
Ключевые слова: купраты, пленки, толщина пленки, малый полярон, масса полярона.
Key words: cuprates, films, film’s thickness, small polaron, polaron’s mass.

1. Kirish. Qattiq jismlarning fizikaviy xossalarini tushuntirishda faol ishlatiladigan kvazizarra tamoyillaridan biri – polaron tamoyilidir. Bu tamoyil avvaliga Landau tomonidan “*avtolokallashgan elektron*“ sifatida fizikaga kiritilgan [1]. Keyinchalik qutbli qattiq jismlarda avtolokallashgan elektronga Pekar ishlarida “polaron” atamasi berilgan [2]. Polaron tamoyili taklif qilinganligiga va polaronlar fizikasi sohasining rivojlanayotganiga bir asrga chamalab qolishiga qaramasdan polaronlar fizikasida o‘z yechimini kutayotgan muammolar talaygina [3]. Polaronlar fizikasiga oid eng so‘nggi ma’lumotlarni [3-5] manbalardan olish mimkin. Yaqin o‘tmishda polaronlar fizikasining jadal rivojlanishi XX asrning 80-yillarida mis oksidli asosli modda (kuprat) larda kashf qilingan yuqori haroratli o‘tao‘tkazuvchanlik (YHO‘O‘) hodisasi bilan chambarchas bog‘liq [6]. YHO‘O‘ hodisasining kashf etilishida ham aynan polaron tamoyili mayoq vazifasini o‘tagan. Darhaqiqat, keyinchalik bajarilgan ko‘pchilik tajribalar kupratlarda elektron-fonon ta’sirlashuvi nihoyatda kuchli ekanligini va polaron va hatto bipolaron (polaronlar juftli) hosil bo‘lishi mumkinligini ko‘rsatmoqda [7]. Polaron tamoyili asosida kupratlarning asosiy xossalarini sifat va son jihatdan tushuntirish mumkin [8]. Shu bilan birga, kupratlar pardalarining odatdagi va normal xossalari